3d

$$\operatorname{rot} f = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_2 f_3 - \partial_3 f_2 \\ \partial_3 f_1 - \partial_1 f_3 \\ \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1 \end{pmatrix}$$

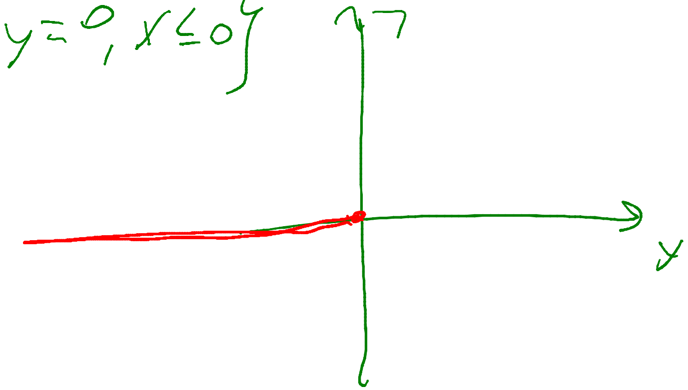
2d

$$f = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix} \qquad \tilde{f} = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{rot} \tilde{f} = \begin{vmatrix} \; \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1 \end{pmatrix}$$

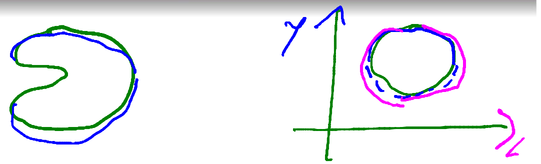
$$\boxed{\operatorname{rot} f = \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1}$$ in 2d

$$G = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y),\ y=0,\ x \le 0\}$$



$$f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

Der Integralsatz von Green für Vektorfelder im $\mathbb{R}^2$.



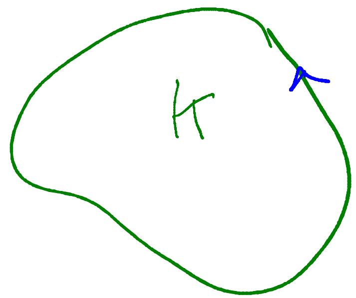
Satz: (Integralsatz von Green)

Sei $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ ein $\mathcal{C}^1$–Vektorfeld auf dem Gebiet $D \subset \mathbb{R}^2$. Weiterhin sei $K \subset D$ kompakt und bezüglich beider Koordinatenrichtungen projizierbar, sodass K von einer geschlossenen, stückweisen $\mathcal{C}^1$–Kurve $\mathbf{c}(t)$ berandet wird.

Die Parametrisierung von $\mathbf{c}(t)$ sei so gewählt, dass K stets links zur Durchlaufrichtung liegt (positiver Umlauf). Dann gilt:

$\partial K \text{ "="} c$

$$\boxed{\oint_c \mathbf{f}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}} = \int_K \underline{\text{rot}\, \mathbf{f}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}}$$



Bemerkung:

Der Greensche Integralsatz gilt auch für kompakte Bereiche, die sich in *endlich* viele, bezüglich beider Koordinatenrichtungen projizierbarer Bereiche zerlegen lassen, in so genannte Greensche Bereiche.

Alternative Formulierung des Greenschen Satzes I.

Wir hatten gesehen, dass die Beziehung

$$\int_a^b \langle f(c(t)), \dot{c}(t) \rangle \, dt = \oint_{c}^{c(a)=c(b)} \mathbf{f}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \oint_c \langle \mathbf{f}, \mathbf{T} \rangle \, ds = \int_a^b \langle f(c(t)), \underbrace{\frac{\dot{c}(t)}{\|\dot{c}(t)\|}}_{T} \rangle \underbrace{\|\dot{c}(t)\| \, dt}_{ds}$$

gilt, wobei $\mathbf{T}(t) = \frac{\dot{\mathbf{c}}(t)}{\|\dot{\mathbf{c}}(t)\|}$ den Tangenteneinheitsvektor bezeichnet.

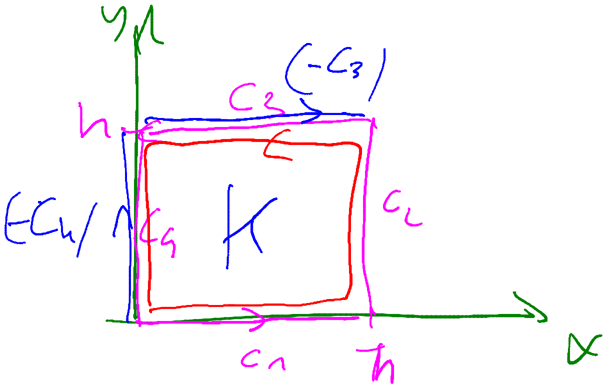
Daraus folgt mit dem Integralsatz von Green

$$\int_K \operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \oint_{\partial K} \langle \mathbf{f}, \mathbf{T} \rangle \, ds$$

Ist $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ ein Geschwindigkeitsfeld, so ist die durch $\mathbf{f}$ beschriebene Strömung unter der Bedingung $\operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$ wirbelfrei, denn

$$\oint_c \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

ist gerade die Zirkulation von $\mathbf{f}(\mathbf{x})$.



$c_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \dot{c}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \int_{c_1} f\,dx = \int_0^h \left\langle \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle dt = \int_0^h f_1(t,0)\,dt$

$c_2(t) = \begin{pmatrix} h \\ t \end{pmatrix}$ $\quad \dot{c}_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \int_{c_2} f\,dx = \int_0^h \left\langle \;, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle dt = \int_0^h f_2(h,t)\,dt \ldots$

$(-c_3)(t) = \begin{pmatrix} t \\ h \end{pmatrix}$ $\quad (-c_3)^{\cdot} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \int_{-c_3} f\,dx = \int_0^h f_1(t,h)\,dt \ldots$

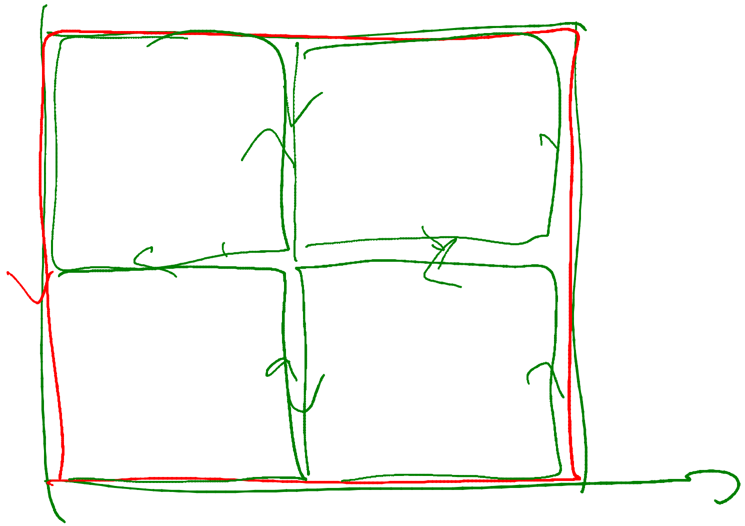
$(-c_4)(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}$ $\quad (-c_4)^{\cdot} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \int_{-c_4} f\,dx = \int_0^h f_2(0,t)\,dt \ldots$

$f(x,y) = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix}$

$$\oint_c f\,dx = \int_{c_1} + \int_{c_2} - \int_{(-c_3)} - \int_{(-c_4)} = \int_0^h \left(f_1(t,0) - f_1(t,h)\right) dt + \int_0^h \left(f_2(h,t) - f_2(0,t)\right) dt$$

$$= \int_0^h \left(\cancel{f_1(t,0)} - \left(\cancel{f_1(t,0)} + f_{1y}(t,0)\cdot h\right)\right) dt + \int_0^t \left(\cancel{f_2(0,t)} + f_{2x}(0,t)\,h - \cancel{f_2(0,t)}\right) dt$$

$$\approx -f_{1y}(0,0)\cdot h^2 + f_{2y}(0,0)\,h^2 \approx \int_0^h \int_0^h f_{2y}(0,0) - f_{1x}(0,0)\,dx\,dy = \int_K \operatorname{rot} f\,dx$$



$$\oint_C f\,dx = \sum \oint_{C_i} f\,dx =$$

$$= \sum \int_{K_i} \operatorname{rot} f\,dx =$$

$$= \int_K \operatorname{rot} f\,dx$$

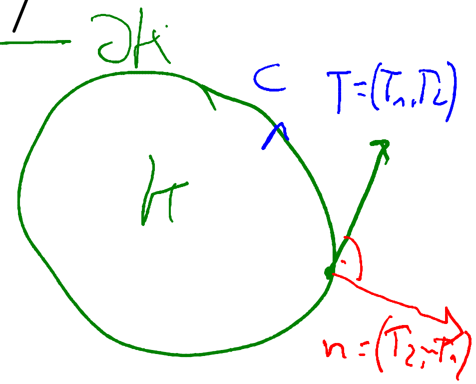
Ersetzt man in der obigen Gleichungen den Vektor $\mathbf{T}$ durch den äußeren Normaleneinheitsvektor $\mathbf{n} = (T_2, -T_1)^T$, so folgt

$\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix}$

$$\boxed{\oint_{\partial K} \langle \mathbf{f}, \mathbf{n} \rangle \, ds} = \oint_{\partial K} (f_1 T_2 - f_2 T_1) ds = \boxed{\oint_{\partial K} \left\langle \begin{pmatrix} -f_2 \\ f_1 \end{pmatrix}, \mathbf{T} \right\rangle ds}$$

$\left\langle \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} T_2 \\ -T_1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$$= \boxed{\int_K \operatorname{rot} \begin{pmatrix} -f_2 \\ f_1 \end{pmatrix} d\mathbf{x}} = \boxed{\int_K \operatorname{div} \mathbf{f} \, d\mathbf{x}}$$

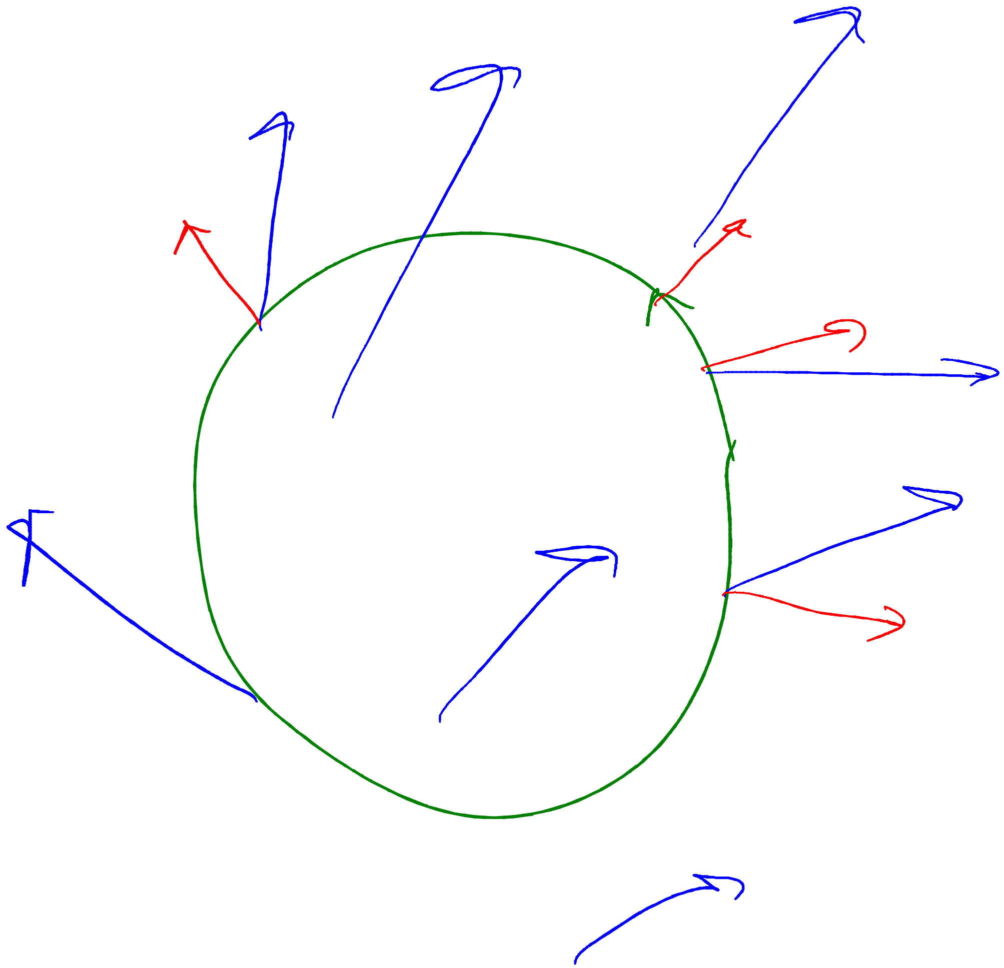


und damit die Beziehung

$\operatorname{rot}\begin{pmatrix} -f_2 \\ f_1 \end{pmatrix} = \partial_1 f_1 - \partial_2(-f_2) = \operatorname{div} f$

$$\int_K \operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \oint_{\partial K} \langle \mathbf{f}, \mathbf{n} \rangle \, ds$$

Ist $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ das Geschwindigkeitsfeld einer Strömung, so beschreibt die rechte Seite den Gesamtfluss der Strömung durch den Rand von K. Gilt also $\operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$, so ist die Strömung quellen– und senkenfrei (oder divergenzfrei).



$\oint \langle f, n \rangle \, ds$

Gesamt Fluss durch Rand

Nochmal zurück zur Existenz von Potentialen.

Folgerung: Ist $\operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$ für alle $\mathbf{x} \in D$, $D \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet, so folgt

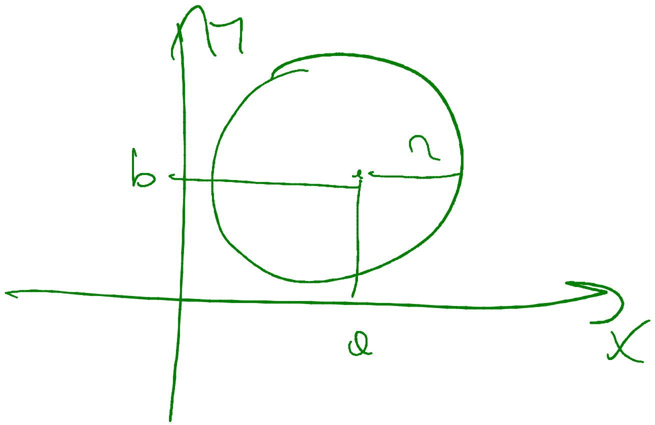
$$\oint_c \mathbf{f}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0$$

für jede geschlossene stückweise $\mathcal{C}^1$–Kurve, die einen Greenschen Bereich $B \subset D$ vollständig umrandet.

Definition: Ein Gebiet $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt einfach zusammenhängend, falls sich jede geschlossene Kurve $\mathbf{c} : [a, b] \to D$ stetig innerhalb von D auf einen Punkt in D zusammenziehen lässt. Genauer: es gibt für $\mathbf{x}^0 \in D$ eine stetige Abbildung

$$\Phi : [a, b] \times [0, 1] \to D$$

mit $\Phi(t, 0) = \mathbf{c}(t)$, für alle $t \in [a, b]$ und $\Phi(t, 1) = \mathbf{x}^0 \in D$, für alle $t \in [a, b]$. Die Abbildung $\Phi(t, s)$ nennt man eine Homotopie.



$$c(t) = \begin{pmatrix} a + r\cos t \\ b + r\sin t \end{pmatrix}$$

$$x^0 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\phi(t,s) = \begin{pmatrix} a + r(1-s)\cos t \\ b + r(1-s)\sin t \end{pmatrix}$$

stetig in t und $\underline{\underline{s}}$

$$\phi(t,0) = c(t)$$

$$\phi(t,1) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$x^0 = (c, d)$

$$\phi(t,s) = \begin{pmatrix} a(1-s) + cs + r(1-s)\cos t \\ b(1-s) + ds + r(1-s)\sin t \end{pmatrix}$$

stetig in t, und s

$$\phi(t,0) = c(t)$$

$$\phi(t,1) = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

Integrabilitätsbedingung für Potentiale.

Satz: Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Ein $\mathcal{C}^1$–Vektorfeld $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^n$ besitzt genau dann ein Potential auf D, falls die Integrabilitätsbedingung

$$\mathbf{J}\,\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (\mathbf{J}\,\mathbf{f}(\mathbf{x}))^T \qquad \text{für alle } \mathbf{x} \in D$$

erfüllt ist, d.h. falls gilt

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_k} \qquad \forall\, j, k$$

Bemerkung: Für $n = 2, 3$ stimmt die Integrabilitätsbedingung mit

$$\operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$$

überein.

$n=2$

$$Jf = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 & \partial_2 f_1 \\ \partial_1 f_2 & \partial_2 f_2 \end{pmatrix}$$

Symmetrie

$$\partial_1 f_2 - \partial_2 f_1 = 0$$

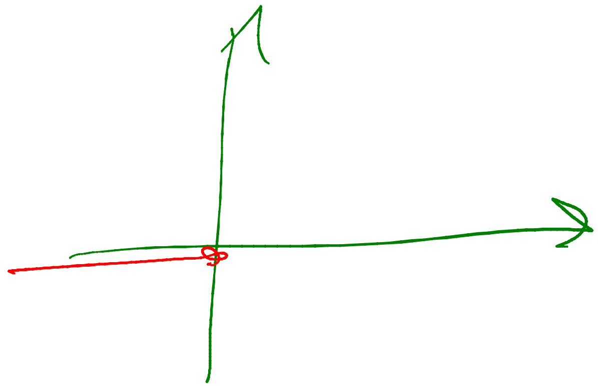
$n=3$

$$Jf = \begin{pmatrix} & \partial_2 f_1 & \partial_3 f_1 \\ \partial_1 f_2 & & \partial_3 f_2 \\ \partial_1 f_3 & \partial_2 f_3 & \end{pmatrix}$$

Symmetrie

$$\operatorname{rot} f = 0$$

$$f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$



$$\operatorname{rot} f = \partial_y\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) - \partial_x\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = 0$$

$$\exists\ \phi = \phi(x,y) \qquad f = \nabla \phi$$

$$\phi_x(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2} \qquad \phi(x,y) = \int \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx = -\frac{y}{y^2}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\,dx$$

$$= -\arctan\frac{x}{y} + c(y)$$

$$\phi_y = -\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right) + c'(y) = \frac{x}{x^2+y^2} + c'(y) \overset{!}{=} \frac{x}{x^2+y^2} = f_2$$

$$c'(y) = 0$$

$$\boxed{\phi(x,y) = -\arctan\frac{x}{y}}$$

Beispiel.

Für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ sei das Vektorfeld

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{2xy}{r^2} + \sin z \\ \ln r^2 + \dfrac{2y^2}{r^2} + ze^y \\ \dfrac{2yz}{r^2} + e^y + x\cos z \end{pmatrix} \qquad \text{mit } r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

gegeben.

Wir wollen untersuchen, ob $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ ein Potential besitzt.

Die Menge $D = \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ ist offensichtlich einfach zusammenhängend. Weiterhin gilt

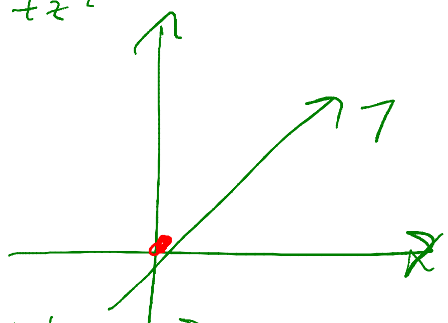
$$\operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$$

Also besitzt $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ ein Potential.

Berechnung des Potentials.

Es muss gelten: $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \nabla\varphi(\mathbf{x})$. Demnach folgt:

$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$



$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \overset{!}{=} f_1(x,y,z) = \frac{2xy}{r^2} + \sin z$$

Durch Integration bezüglich der Variablen x ergibt sich:

$(y \ln r^2)_x = y\,\frac{2x}{r^2}$

$$\varphi(\mathbf{x}) = y \ln r^2 + x \sin z + c(y,z)$$

mit einer unbekannten Funktion $c(y,z)$.

Einsetzen in die Gleichung

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} \overset{!}{=} f_2(x,y,z) = \ln r^2 + \frac{2y^2}{r^2} + ze^y$$

liefert

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \cancel{\ln r^2} + \cancel{\frac{2y^2}{r^2}} + \frac{\partial c}{\partial y} = \cancel{\ln r^2} + \cancel{\frac{2y^2}{r^2}} + ze^y$$

Berechnung des Potentials (Fortsetzung).

Daraus folgt die Bedingung

$$\frac{\partial c}{\partial y} = ze^y$$

und somit gilt

$$c(y,z) = ze^y + d(z)$$

für eine unbekannte Funktion $d(z)$. Wir haben damit:

$$\boxed{\varphi(\mathbf{x}) = y\ln r^2 + x\sin z + ze^y + d(z)}$$

Die letzte Bedingung lautet

$$\cancel{\frac{2yz}{r^2}} + \cancel{x\cos z} + \cancel{e^y} + d'(z) = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \overset{!}{=} f_3(x,y,z) = \cancel{\frac{2yz}{r^2}} + \cancel{e^y} + \cancel{x}\cos z$$

Daraus folgt $\boxed{d'(z) = 0}$ und das Potential ist gegeben durch

$$\boxed{\varphi(\mathbf{x}) = y\ln r^2 + x\sin z + ze^y + c} \qquad \text{für } c \in \mathbb{R}$$

3.3 Oberflächenintegrale

Definition: Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $\mathbf{p} : D \to \mathbb{R}^3$ eine $\mathcal{C}^1$–Abbildung

$$\mathbf{x} = \mathbf{p}(\mathbf{u}) \quad \text{mit } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \text{ und } \mathbf{u} = (u_1, u_2)^T \in D \subset \mathbb{R}^2$$

Sind für alle $\mathbf{u} \in D$ die beiden Vektoren

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2}$$

linear unabhängig, so heißt

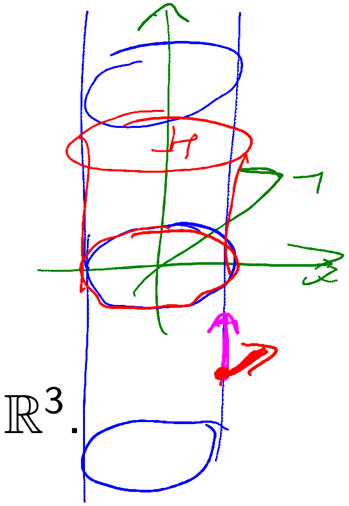
$$F := \{\mathbf{p}(\mathbf{u}) \mid \mathbf{u} \in D\}$$

eine Fläche bzw. ein Flächenstück. Die Abbildung $\mathbf{x} = \mathbf{p}(\mathbf{u})$ nannt man dann eine Parametrisierung oder Parameterdarstellung der Fläche F.

Beispiel I.

Wir betrachten für gegebenes $r > 0$ die Abbildung

r fest



$$\mathbf{p}(\varphi, z) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \qquad \text{für } (\varphi, z) \in \mathbb{R}^2.$$

$\in (0, 2\pi] \times \mathbb{R}$

Die dadurch parametrisierte Fläche ist ein unbeschränkter Zylinder im $\mathbb{R}^3$.

Schränken wir den Definitionsbereich ein, etwa

$$\boxed{(\varphi, z) \in K := [0, 2\pi] \times [0, H] \subset \mathbb{R}^2}$$

so erhalten wir einen beschränkten Zylinder der Höhe H.

Die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

von $\mathbf{p}(\varphi, z)$ sind linear unabhängig auf ganz $\mathbb{R}^2$.

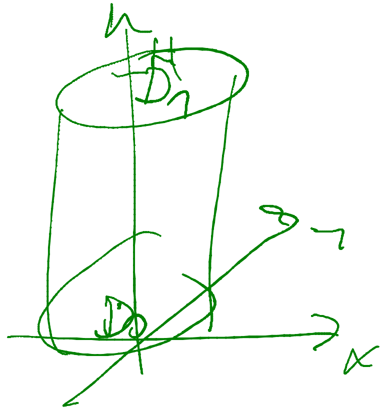
$$p_0(s,\varphi) = \begin{pmatrix} s\cos\varphi \\ s\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

$z = 0$ fest

$(s,\varphi) \in (0,R] \times (0,2\pi]$

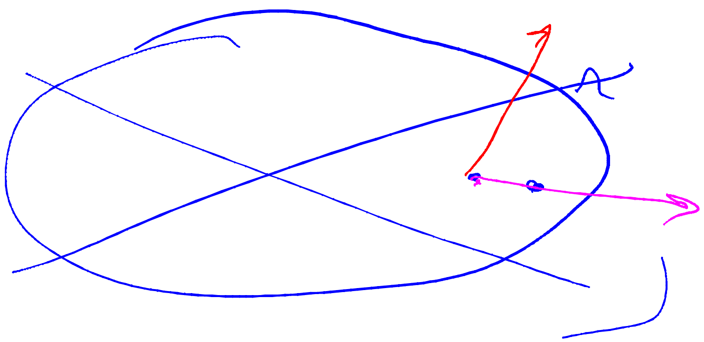
$$p_1(s,\varphi) = \begin{pmatrix} s\cos\varphi \\ s\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

$z = H$ fest



$$\frac{\partial p_0}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -s\sin\varphi \\ s\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial p_0}{\partial s} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

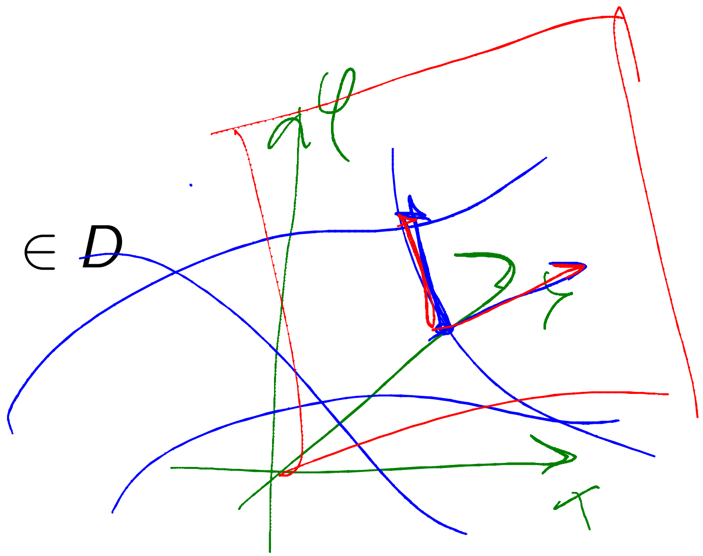


Beispiel II.

Der Graph einer skalaren $\mathcal{C}^1$–Funktion $\varphi : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$, ist eine Fläche.

Eine Parametrisierung ist gegeben durch

$$\mathbf{p}(u_1, u_2) := \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \varphi(u_1, u_2) \end{pmatrix} \qquad \text{für } \mathbf{u} \in D$$



Die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \varphi_{u_1} \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \varphi_{u_2} \end{pmatrix}$$

sind linear unabhängig.

Die Tangentialebene einer Fläche.

Die beiden linear unabhängigen Vektoren

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1}(\mathbf{u}^0) \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2}(\mathbf{u}^0)$$

liegen tangential an die Fläche F.

Sie spannen die Tangentialebene $T_{\mathbf{x}^0}F$ der Fläche F im Punkt $\mathbf{x}^0 = \mathbf{p}(\mathbf{u})$ auf.

Die Tangentialebene hat die Parameterdarstellung

$$\boxed{T_{\mathbf{x}^0}F \ : \ \mathbf{x} = \mathbf{x}^0 + \lambda \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1}(\mathbf{u}^0) + \mu \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2}(\mathbf{u}^0)} \qquad \text{für } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Frage: Wie kann man den Flächeninhalt einer gegebenen Fläche F berechnen?