3.1 Bereichsintegrale

stelen

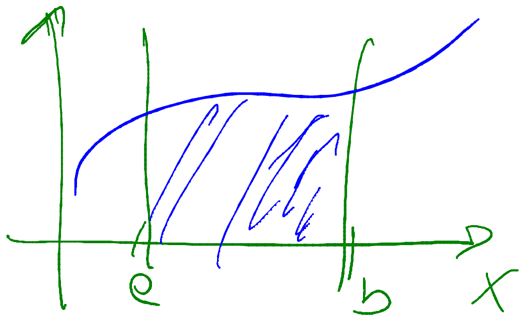
Gegeben sei eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}^n$.

Ziel: Berechnung des Volumens unterhalb des Graphen von $f(\mathbf{x})$:

$$V = \int_D f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

Erinnerung Analysis II: Bestimmtes Riemann–Integral einer Funktion $f(x)$ über dem Intervall $[a, b]$:

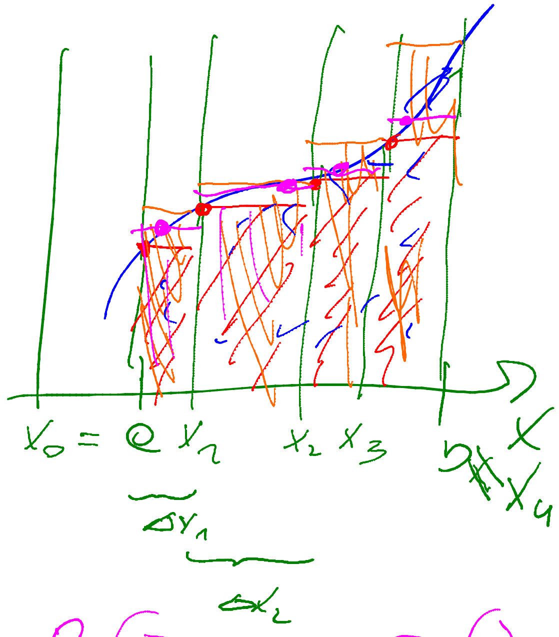
$$I = \int_a^b f(x) dx$$



Das Integral I war als Grenzwert von Riemannscher Ober– und Untersumme definiert, falls diese Grenzwerte jeweils existierten und übereinstimmten.

$$U_f = \sum_{i=1}^{4} f(x_{i-1})\,\Delta x_i$$

$$O_f = \sum_{i=1}^{4} f(x_i)\,\Delta x_i$$



$$U_f \le I \le O_f$$

$$U_f(Z) \le R_f(Z) \le O_f(Z)$$

Def.: f Riemann integrierbar, falls

$$U_f \to U = O \leftarrow O_f \qquad U = O = \int_a^b f(x)\,dx$$

---

f monoton $\longrightarrow$ f int'bar, f stetig $\longrightarrow$ f int'bar.

---

f gegeben, suche Stammfkt $F = F(x)$ mit $F'(x) = f(x)$

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Konstruktionsprinzip für Bereichsintegrale.

Vorgehensweise: Analog dem eindimensionalen Fall.

Aber: der Definitionsbereich D ist komplizierter.

Startpunkt: Betrachten zunächst den Fall zweier Variablen, $n = 2$, und einen Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}^2$ der Form

$$\boxed{D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset \mathbb{R}^2}$$

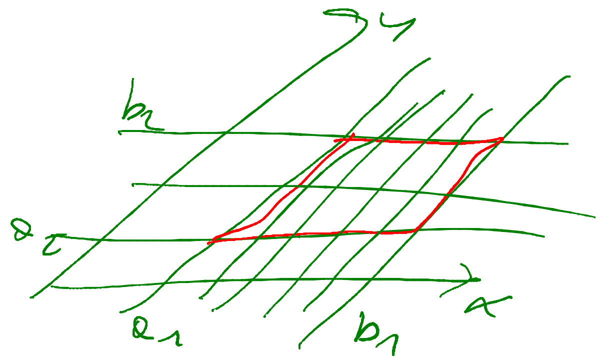
d.h. D ist ein kompakter Quader (Rechteck).

Weiterhin sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion.

Definition: Man nennt $Z = \{(x_0, x_1, \ldots, x_n), (y_0, y_1, \ldots, y_m)\}$ eine Zerlegung des Quaders $D = [a_1, b - 1] \times [a_2, b_2]$, falls gilt

$$a_1 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b_1$$

$$a_2 = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = b_2$$



Mit $\mathbf{Z}(D)$ wird die Menge der Zerlegungen von D bezeichnet.

Zerlegungen und Riemannsche Summen.

Definition:

- Die Feinheit einer Zerlegung $Z \in \mathbf{Z}(D)$ ist gegeben durch

$$\boxed{\|Z\| \;:=\; \max_{i,j}\left\{\underbrace{|x_{i+1}-x_i|}_{\Delta x_i},\, \underbrace{|y_{j+1}-y_j|}_{\Delta y_j}\right\}}$$

- Für eine vorgegebene Zerlegung Z nennt man die Mengen

$$\boxed{Q_{ij} \;:=\; [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]}$$

die Teilquader der Zerlegung Z. Das Volumen des Teilquaders Q_{ij} ist

$$\boxed{\mathrm{vol}(Q_{ij}) \;:=\; (x_{i+1}-x_i)\cdot(y_{j+1}-y_j)}$$

- Für beliebige Punkte $x_{ij} \in Q_{ij}$ der jeweiligen Teilquader nennt man

$$\boxed{R_f(Z)} := \sum_{i,j} f(\mathbf{x}_{ij}) \cdot \mathrm{vol}(Q_{ij})$$

eine Riemannsche Summe zur Zerlegung Z.

Definition:

Analog zum Integral einer Variablen heißen für eine Zerlegung Z

$$\boxed{U_f(Z)} := \sum_{i,j} \underline{\inf_{\mathbf{x}\in Q_{ij}} f(\mathbf{x})} \cdot \mathrm{vol}(Q_{ij})$$

$$\boxed{O_f(Z)} := \sum_{i,j} \underline{\sup_{\mathbf{x}\in Q_{ij}} f(\mathbf{x})} \cdot \mathrm{vol}(Q_{ij})$$

die Riemannnsche Untersumme bzw. Riemannsche Obersumme von $f(\mathbf{x})$.

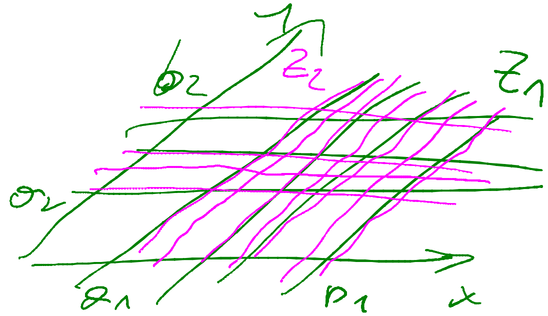
Bemerkung:

Eine Riemannsche Summe zur Zerlegung Z liegt stets zwischen der Unter– und Obersumme dieser Zerlegung, d.h. es gilt

$$\boxed{U_f(Z) \leq R_f(Z) \leq O_f(Z)}$$

Bemerkung.

Ensteht eine Zerlegung Z_2 aus der Zerlegung Z_1 durch Hinzunahme weiterer Zwischenpunkte x_i und/oder y_j, so gilt



$$\underbrace{U_f(Z_2)}_{\text{feiner}} \geq \underbrace{U_f(Z_1)}_{\text{gröber}} \quad \text{und} \quad \underbrace{O_f(Z_2)}_{\text{feiner}} \leq \underbrace{O_f(Z_1)}_{\text{gröber}}$$

Für zwei beliebige Zerlegungen Z_1 und Z_2 gilt stets:

$$U_f(Z_1) \leq O_f(Z_2)$$

$$U_f(Z_i) \leq O_f(Z_j)$$

Frage: Was passiert mit den Unter– und Obersummen im Grenzwert $\|Z\| \to 0$:

$$\begin{aligned} U_f &:= \sup\{U_f(Z) : Z \in \mathbf{Z}(D)\} \overset{\text{z.B.}}{<} O_f(Z_1) \\ O_f &:= \inf\{O_f(Z) : Z \in \mathbf{Z}(D)\} > U_f(Z_1) \end{aligned}$$

Beobachtung: Die beiden Werte U_f und O_f existieren, da Unter– und Obersumme monoton und beschränkt sind.

aber: i.A. $U_f \neq O_f$ $\quad U_f \leq O_f$

Riemannsche Ober– und Unterintegrale.

Definition:

1. Das Riemannsches Unter– bzw. Oberintegral der Funktion $f(\mathbf{x})$ über D ist gegeben durch

$$\int_{\underline{D}} f(\mathbf{x})d\mathbf{x} \quad := \quad \sup\{U_f(Z) \,:\, Z \in \mathbf{Z}(D)\} \quad = U_f$$

$$\int_{\overline{D}} f(\mathbf{x})d\mathbf{x} \quad := \quad \inf\{O_f(Z) \,:\, Z \in \mathbf{Z}(D)\} \quad = O_f$$

Definition:

2. Die Funktion $f(\mathbf{x})$ nennt man Riemann–integrierbar über D, falls Unter– und Oberintegral übereinstimmen. Das Riemann–Integral von $f(\mathbf{x})$ über D ist dann gegeben durch

$$\int_D f(\mathbf{x})d\mathbf{x} := \underbrace{\int_{\underline{D}} f(\mathbf{x})d\mathbf{x}}_{U_f} = \underbrace{\int_{\overline{D}} f(\mathbf{x})d\mathbf{x}}_{O_f}$$

$$f(x,y) = x^2 + y \qquad (x,y) = [0,a] \times [0,b]$$

$$x_i = \frac{a}{n} i \qquad i = 0, 1, \dots, n \qquad \Delta x_i = \frac{a}{n}$$

$$y_j = \frac{b}{m} j \qquad j = 0, \dots, m \qquad \Delta y_j = \frac{b}{m}$$

$$U_f(Z) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (x_{i-1}^2 + y_{j-1}) \underbrace{\frac{a}{n}\frac{b}{m}}_{Vol(Q_{ij})} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \left(\left(\frac{a}{n}\right)^2 (i-1)^2 + \frac{b}{m}(j-1) \right) \frac{a}{n}\frac{b}{m} =$$

$$= \frac{a^3 b}{n^3 \cancel{m}} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (i-1)^2}_{\frac{(n-1)n(2(n-1)+1)}{6}} \cancel{\sum_{j=1}^{m} 1} + \frac{a}{\cancel{n}} \frac{b^2}{m^2} \cancel{\sum_{i=1}^{n} 1} \underbrace{\sum_{j=1}^{m} (j-1)}_{\frac{(m-1)m}{2}} =$$

$$= a^3 b \frac{(1-\frac{1}{n})(2-\frac{2}{n}+\frac{1}{n})}{6} + ab^2 \frac{(1-\frac{1}{m}) \cdot 1}{2} \xrightarrow[m \to \infty]{n \to \infty} \frac{a^3 b}{3} + \frac{ab^2}{2}$$

$$O_f(Z) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (x_i^2 + y_j) \frac{a}{n}\frac{b}{m} = \dots = a^3 b \, \frac{1 (1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})}{6} + ab^2 \frac{1(1+\frac{1}{m})}{2} \longrightarrow \text{ " }$$

$\Longrightarrow$ f integrabil

$$\sum_{i=1}^{n} 1 = n \qquad \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

mit Fubini: $f(x,y) = x^2 + y$

$$\int_0^b \int_0^a f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^b \left[\frac{x^3}{3} + yx \Big|_0^a \right] dy$$

$$= \int_0^b \left(\frac{a^3}{3} + ya \right) dy = \frac{a^3}{3} b + a \frac{b^2}{2}$$

Bemerkung.

Wir haben bis jetzt "nur" den Fall von **zwei** Variablen betrachtet:

$$f : D \to \mathbb{R}, \qquad D \in \mathbb{R}^2$$

In höheren Dimensionen, $n > 2$, ist die Vorgehensweise analog.

Schreibweise: für $n = 2$ und $n = 3$

$$\int_D f(x,y)dxdy \quad \text{bzw.} \quad \int_D f(x,y,z)dxdydz$$

oder auch

$$\iint_D f(x,y)dxdy \quad \text{bzw.} \quad \iiint_D f(x,y,z)dxdydz$$

Elementare Eigenschaften des Integrals.

Satz:

a) Linearität

$$\int_D (\alpha f(\mathbf{x}) + \beta g(\mathbf{x}))d\mathbf{x} = \alpha \int_D f(\mathbf{x})d\mathbf{x} + \beta \int_D g(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

b) Monotonie

Gilt $f(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x})$ für alle $\mathbf{x} \in D$, so folgt:

$O_f(Z) \leq O_g(Z)$ $\quad$ $U_f(Z) \leq U_g(Z)$

$O_f \leq O_g$ $\quad$ $U_f \leq U_g$

Spezialfall: $f = 0$, $0 \leq g$ $\Rightarrow 0 \leq \int_D g(x)dx$

$$\int_D f(\mathbf{x})d\mathbf{x} \leq \int_D g(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

c) Positivität

Gilt für alle $\mathbf{x} \in D$ die Beziehung $f(\mathbf{x}) \geq 0$, d.h. $f(\mathbf{x})$ ist nicht–negativ, so folgt:

$$\int_D f(\mathbf{x})d\mathbf{x} \geq 0$$

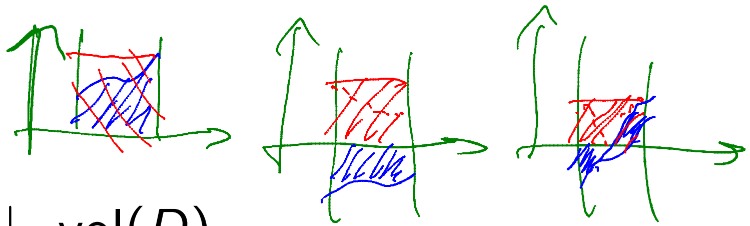
~~**Satz:**~~ Definition

a) Sind D_1, D_2 und D Quader, $D = D_1 \cup D_2$ und $\mathrm{vol}(D_1 \cap D_2) = 0$, so ist $f(\mathbf{x})$ genau dann über D integrierbar, falls $f(\mathbf{x})$ über D_1 und D_2 integrierbar ist, und es gilt

$$\int_D f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_{D_1} f(\mathbf{x})d\mathbf{x} + \int_{D_2} f(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

Satz

b) Für das Integral gilt die folgende Abschätzung



$$\left| \int_D f(\mathbf{x})d\mathbf{x} \right| \quad \leq \quad \sup_{\mathbf{x}\in D} |f(\mathbf{x})| \cdot \mathrm{vol}(D)$$

alternativ $\qquad f(x) \leq \sup|f(x)|$ ...

c) Riemannsches Kriterium

$f(\mathbf{x})$ ist genau dann über D integrierbar, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists Z \in \mathbf{Z}(D) \quad : \quad O_f(Z) - U_f(Z) < \varepsilon$$

Der Satz von Fubini.

Satz: (Satz von Fubini) Ist $f : D \to \mathbb{R}$ integrierbar, $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ ein Quader, und existieren die Integrale

$$\boxed{F(x) = \int_{a_2}^{b_2} f(x, y)dy} \quad \text{und} \quad \boxed{G(y) = \int_{a_1}^{b_1} f(x, y)dx}$$

für alle $x \in [a_1, b_1]$ bzw. $y \in [a_2, b_2]$, so gelten

$$\boxed{\int_D f(\mathbf{x})d\mathbf{x}} = \int_{a_1}^{b_1} \underbrace{\int_{a_2}^{b_2} f(x, y)dy}_{F(x)}dx$$

$$\boxed{\int_D f(\mathbf{x})d\mathbf{x}} = \int_{a_2}^{b_2} \underbrace{\int_{a_1}^{b_1} f(x, y)dx}_{G(y)}dy$$

Bedeutung:
Der Satz von Fubini erlaubt Reduktion auf eindimensionale Integrale.

Beispiel.

Gegeben sei der Quader $D = \boxed{[0,1] \times [0,2]}$ sowie die Funktion

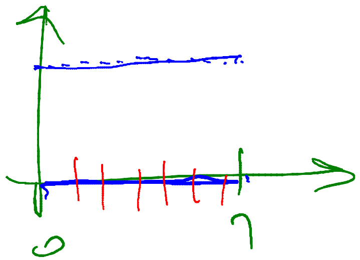
$$\boxed{f(x,y) = 2 - xy}$$

Stetige Funktionen sind – wie wir gleich zeigen werden – über Quadern integrierbar. Daher können wir den Satz von Fubini anwenden:

$$\begin{aligned}
\int_D f(\mathbf{x})d\mathbf{x} &= \int_0^2 \underbrace{\int_0^1 f(x,y)dxdy}_{G(y)} = \int_0^2 \left[2x - \frac{x^2 y}{2}\right]_{x=0}^{x=1} dy \\
&= \int_0^2 \overbrace{\left(2 - \frac{y}{2}\right)} dy = \left[2y - \frac{y^2}{4}\right]_{y=0}^{y=2} = \underline{\underline{3}}
\end{aligned}$$

Bemerkung: Der Satz von Fubini verlangt als Voraussetzung die Integrierbarkeit von $f(\mathbf{x})$. Die Existenz der beiden Integrale $F(x)$ und $G(y)$ alleine garantiert die Integrierbarkeit von $f(\mathbf{x})$ **nicht**!

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \text{ rational} \\ 1 & x \text{ irrational} \end{cases} \qquad \int_0^1 f(x)\,dx = ?$$

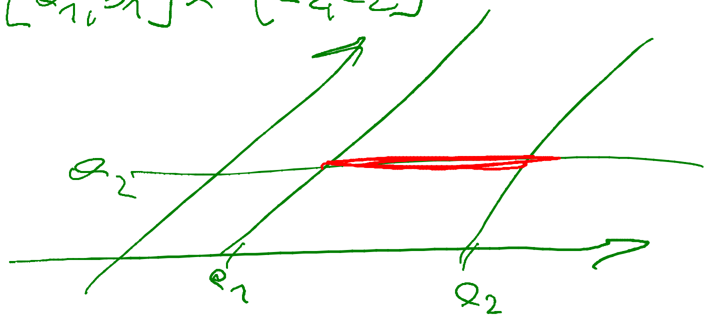


$$O_f(Z) = 1 = O_f \qquad O_f \neq U_f$$
$$U_f(Z) = 0 = U_f$$

f nicht Riemannintegrierbar

$$D = [a_1, b_1] \times [a_2, a_2]$$

$$\int_D f\,dx = 0 \qquad U_f(Z) = 0, \quad O_f(Z) = 0$$



$$\int \chi_D(x)\,dx = 0 \implies D \text{ Nullmenge}$$

1dimensional in 2 Dimensionen

Die charakteristische Funktion.

Definition: Für $D \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $f : D \to \mathbb{R}$ beschränkt setzen wir

$$f^*(\mathbf{x}) := \begin{cases} f(\mathbf{x}) & : \quad \text{falls } \mathbf{x} \in D \\ 0 & : \quad \text{falls } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus D \end{cases}$$

Speziell für $f(\mathbf{x}) = 1$ heißt $f^*(\mathbf{x})$ die charakteristische Funktion von D. Die charakteristische Funktion von D wird mit $\mathcal{X}_D(\mathbf{x})$ bezeichnet.

Sei nun Q der kleinste Quader mit $D \subset Q$. Dann heißt die Funktion $f(\mathbf{x})$ integrierbar über D, falls $f^*(\mathbf{x})$ über Q integrierbar ist, und wir setzen

$$\boxed{\int_D f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} := \int_Q f^*(\mathbf{x}) d\mathbf{x}}$$

Messbarkeit und Nullmengen.

Definition: Die kompakte Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt messbar, falls das Integral

$$\text{vol}(D) := \int_D 1 d\mathbf{x} = \int_Q \mathcal{X}_D(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

existiert. Man nennt dann $\text{vol}(D)$ das Volumen von D im $\mathbb{R}^n$.

Die kompakte Menge D heißt Nullmenge, falls D messbar ist und $\text{vol}(D) = 0$ gilt.

Bemerkung:

- Ist die Menge D selbst ein Quader, so folgt $Q = D$, und somit gilt

$$\int_D f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_Q f^*(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_Q f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

  d.h. die eingeführten Integrationsbegriffe stimmen überein.

- Quader sind messbare Mengen.
- $\text{vol}(D)$ in diesem Fall das *tatsächliche* Volumen des Quaders im $\mathbb{R}^n$.

$$\int_Q \mathbb{1}_{[0,a]\times[0,b]}(x)\,dx = a\cdot b$$

$$u_x(z) = 1 = u_x$$

$$\|$$

$$o_x(z) = 1 = o_x$$

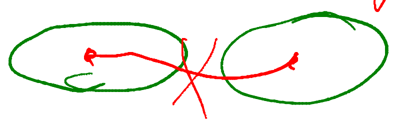
Drei wichtige Eigenschaften der Integration.

Bei der mehrdimensionalen Integration gelten die folgenden Aussagen.

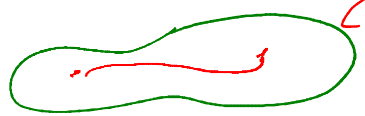
Satz: Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Dann ist D genau dann messbar, falls der Rand ∂D von D eine Nullmenge ist.

Satz: Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und messbar, und sei $f : D \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $f(\mathbf{x})$ integrierbar über D.

nicht z.h.

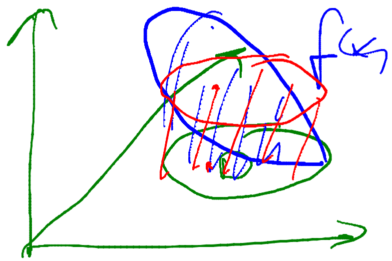


zusammenhängend



Satz: (Mittelwertsatz) Ist $D \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, zusammenhängend und messbar, und ist $f : D \to \mathbb{R}$ stetig, so gibt es einen Punkt $\xi \in D$ mit

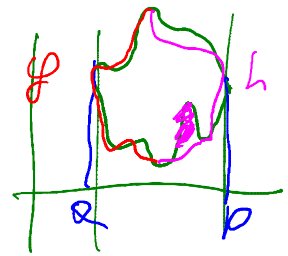
$$\boxed{\int_D f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = f(\xi) \cdot \operatorname{vol}(D)}$$



Normalbereiche.

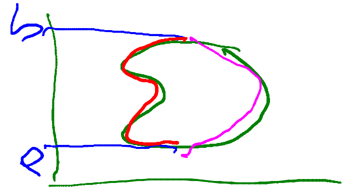
Definition:

- Eine Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^2$ heißt Normalbereich, falls es stetige Funktionen g, h bzw. $\tilde{g}, \tilde{h}$ gibt mit



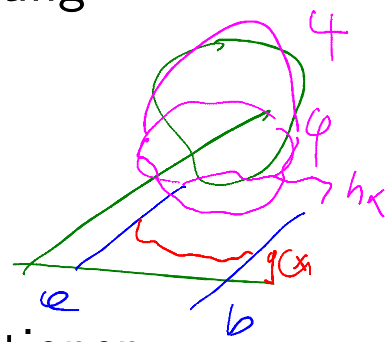
$$D = \{(x, y) \mid a \le x \le b \text{ und } g(x) \le y \le h(x)\}$$

bzw.



$$D = \{(x, y) \mid \tilde{a} \le y \le \tilde{b} \text{ und } \tilde{g}(y) \le x \le \tilde{h}(y)\}$$

- Eine Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^3$ heißt Normalbereich, falls es eine Darstellung



$$\begin{aligned} D \quad = \quad & \{\, (x_1, x_2, x_3) \mid a \le x_i \le b, \;\; g(x_i) \le x_j \le h(x_i) \\ & \quad \text{und } \varphi(x_i, x_j) \le x_k \le \psi(x_i, x_j) \,\} \end{aligned}$$

gibt mit einer Permutation (i, j, k) von $(1, 2, 3)$ und stetigen Funktionen g, h, φ und ψ.

Kugel 3d $\qquad x^2+y^2+z^2=1$

$-1 \le x \le +1$

$-\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2}$

$-\sqrt{1-x^2-y^2} \le z \le +\sqrt{1-x^2-y^2}$