Ein weiteres Beispiel.

Betrachte die Gleichung $g(x,y) = e^{y-x} + 3y + x^2 - 1 = 0$.

Es gilt $\quad e^{y-x}(y'-1) + 3y' + 2x = 0$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = e^{y-x} + 3 > 0 \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}. \quad \Longrightarrow \text{ immer nach } y \text{ auflösbar}$$

Die Gleichung ist also für jedes $x \in \mathbb{R}$ nach $y =: f(x)$ auflösbar und $f(x)$ ist eine stetig differenzierbare Funktion. Implizite Differentiation liefert

$y = y(x)$ $\quad \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} y' = -e^{y-x} + 2x + (e^{y-x} + 3) y' = 0$

$\varphi(x, y(x)) = 0$

$$e^{y-x}(y'-1) + 3y' + 2x = 0 \quad \Longrightarrow \quad y' = \frac{e^{y-x} - 2x}{e^{y-x} + 3}$$

Erneute Differentiation liefert

$$e^{y-x}y'' + e^{y-x}(y'-1)^2 + 3y'' + 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad y'' = -\frac{2 + e^{y-x}(y'-1)^2}{e^{y-x} + 3} = h(y', y, x)$$

Aber: Explizites Auflösen nach y (mit Hilfe elementarer Funktionen) ist in diesem Fall nicht möglich!

$e^{y-x}(y'-1)^2 + e^{y-x}(y'') + 3y'' + 2 = 0$

$$\varphi(x,y) = e^{y-x} + 3y + x^2 - 1 = 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = e^{y-x} + 3 > 0 \Rightarrow \exists \; y = y(x)$$

$$0 = \varphi(x,y) = \varphi(x, y(x)) = e^{y(x)-x} + 3y(x) + x^2 - 1 \quad \Big| \frac{d}{dx}$$

$$0 = e^{y-x}(y'-1) + 3y' + 2x \quad \Big| \frac{d}{dx}$$

$$0 = e^{y-x}(y'') + e^{y-x}(y'-1)^2 + 3y'' + 2$$

$$g(x,y)=0 \qquad g(x_0,y_0)=0 \qquad g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

$$x \in \mathbb{R}^{n-m} \qquad y \in \mathbb{R}^m$$

$$0 = g(x,y) = \underbrace{g(x_0,y_0)}_{=0} + \underbrace{\underbrace{\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0)}_{\substack{m \times n-m \\ \text{Jakobi-M.}}}(x-x_0) + \underbrace{\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0)}_{\substack{m \times m \\ \text{Jakobi}}}(y-y_0)}_{\approx 0} + \dots$$

falls $\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0)$ regulär $\Longrightarrow y = f(x)$

Linearisierung

$$\left(\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0)\right)^{-1} \frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) = (y-y_0)$$

$$y = y_0 - \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^{-1}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)(x-x_0)$$

$$\left[\,y = y_0 + f'(x_0)(x-x_0)\,\right]$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0) = -\left[\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^{-1}\frac{\partial g}{\partial x}\right](x_0,y_0)$$

Allgemeine Bemerkung.

Implizites Differenzieren einer durch

$$g(x,y) = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial y} \neq 0$$

implizit definierten Funktion $y = f(x)$, mit $x, y \in \mathbb{R}$, ergibt

$$f'(x) = -\frac{g_x}{g_y}$$

$$f''(x) = -\frac{g_{xx}g_y^2 - 2g_{xy}g_xg_y + g_{yy}g_x^2}{g_y^3}$$

Daher ist der Punkt x^0 ein stationärer Punkt von $f(x)$, falls gilt

$$g(x^0,y^0) = g_x(x^0,y^0) = 0 \quad \text{und} \quad g_y(x^0,y^0) \neq 0$$

$f'(x_0) = -\frac{g_x(x_0,y_0)}{g_y(x_0,y_0)} = 0$

Weiter ist x^0 ein lokales Maximum (bzw. Minimum), falls

$-f'' = \frac{g_{xx}g_y^2 - 0 + 0}{g_y^3} =$

$$\frac{g_{xx}(x^0,y^0)}{g_y(x^0,y^0)} > 0 \qquad \left(\text{bzw. } \frac{g_{xx}(x^0,y^0)}{g_y(x^0,y^0)} < 0\right)$$

$g(x,y)=0 \qquad g(x_0,y_0)=0 \qquad g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$?

$\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0 \implies y=f(x)$

$0 = g(x,y) = g(x, f(x)) \quad \Big/ \frac{d}{dx}$

$$0 = \underbrace{\underbrace{\left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}\right)}_{1\times 2} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{dx}{dx} \\ \frac{df}{dx} \end{pmatrix}}_{2\times 1}}_{\text{Kettenregel}} = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ f' \end{pmatrix} = \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} f' = g_x + g_y f' \quad \Big/ \frac{d}{dx}$$

$f' = -\frac{g_x}{g_y}$

$$g_{xx} + g_{xy} f' + (g_{yx} + g_{yy} f') f' + g_y f'' = 0$$

$$g_{xx} - 2 g_{xy} \frac{g_x}{g_y} + g_{yy} \frac{g_x^2}{g_y^2} + g_y f'' = 0$$

$$f'' = -\frac{g_{xx} g_y^2 - 2 g_{xy} g_x g_y + g_{yy} g_x^2}{g_y^3}$$

Implizite Darstellung ebener Kurven.

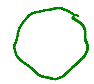
Betrachte die Lösungsmenge einer skalaren Gleichungen

$g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$

$g(x,y) = x^2+y^2+1 = 0$ keine Lsg

$g(x,y) = x^2+y^2 = 0$ $(0,0)$

$g(x,y) = x^2+y^2-\rho^2 = 0$



$$g(x,y) = 0$$

Falls gilt

$$\operatorname{grad} g = (g_x, g_y) \neq 0$$

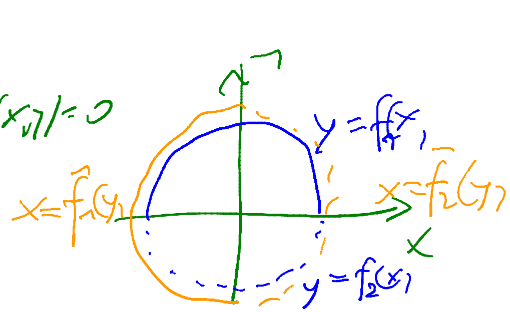
so definiert $g(x,y)$ lokal eine Funktion $y = f(x)$ oder $x = \bar{f}(y)$.

Definition: Ein Lösungspunkt (x^0, y^0) der Gleichung $g(x,y) = 0$ mit

- $\operatorname{grad} g(x^0, y^0) \neq 0$ heißt regulärer Punkt,
- $\operatorname{grad} g(x^0, y^0) = 0$ heißt singulärer Punkt.

Beispiel: Betrachte wieder die Kreisgleichung $\operatorname{grad} g(x,y) = 2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq 0$ für $g(x,y) = 0$

$$g(x,y) = x^2 + y^2 - r^2 = 0 \quad \text{mit } r > 0.$$



Auf der Kreislinie liegen keine singulären Punkte!

Horizontale und vertikale Tangenten.

Bemerkung:

a) Gilt für einen regulären Punkt (x^0, y^0) $\quad y = f(x) \quad \boxed{f'(x_0) = -\frac{g_x(x_0,y_0)}{g_y(x_0,y_0)} = 0}$

$$g_x(\mathbf{x}^0) = 0 \quad \text{und} \quad g_y(\mathbf{x}^0) \neq 0$$

so besitzt die Lösungskurve eine horizontale Tangente in $\mathbf{x}^0$.

b) Gilt für einen regulären Punkt (x^0, y^0) $\quad x = f(y) \quad \boxed{f'(x) = -\frac{g_y(x_0,y_0)}{g_x(x_0,y_0)} = 0}$

$$g_x(\mathbf{x}^0) \neq 0 \quad \text{und} \quad g_y(\mathbf{x}^0) = 0$$

so besitzt die Lösungskurve eine vertikale Tangente in $\mathbf{x}^0$.

c) Ist $\mathbf{x}^0$ ein singulärer Punkt, so wird die Lösungsmenge bei $\mathbf{x}^0$ "in zweiter Näherung" durch folgende quadratische Gleichung approximiert.

$$g_{xx}(\mathbf{x}^0)(x - x^0)^2 + 2g_{xy}(\mathbf{x}^0)(x - x^0)(y - y^0) + g_{yy}(\mathbf{x}^0)(y - y^0)^2 = 0$$

$$0 = g(x,y) = \underbrace{g(x_0,y_0)}_{=0} + \underbrace{\text{grad}\, g(x_0,y_0)}_{=0} \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x-x_0, y-y_0)\, H_g(x_0,y_0) \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} + \dots \qquad H_g = \begin{pmatrix} g_{xx} & g_{yx} \\ g_{xy} & g_{yy} \end{pmatrix}$$

Bemerkungen.

Wegen c) erhält man für $g_{xx}, g_{xy}, g_{yy} \neq 0$:

$$\det \mathbf{H}g(\mathbf{x}^0) > 0 \quad : \quad \mathbf{x}^0 \text{ ist ein isolierter Punkt der Lösungsmenge}$$

$$\det \mathbf{H}g(\mathbf{x}^0) < 0 \quad : \quad \mathbf{x}^0 \text{ ist ein Doppelpunkt}$$

$$\det \mathbf{H}g(\mathbf{x}^0) = 0 \quad : \quad \mathbf{x}^0 \text{ ist ein Rückkehrpunkt bzw. eine Spitze}$$

Geometrische Interpretation:

a) Gilt $\det \mathbf{H}g(\mathbf{x}^0) > 0$, so sind beide Eigenwerte von $\mathbf{H}g(\mathbf{x}^0)$ entweder strikt positiv oder strikt negativ, d.h. $\mathbf{x}^0$ ist ein strenges lokales Minimum oder Maximum von $g(\mathbf{x})$.

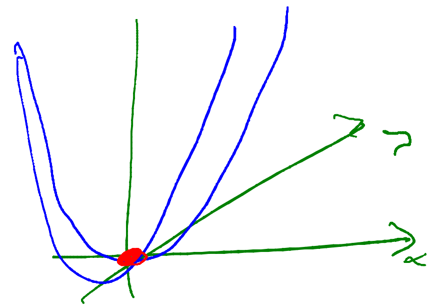
b) Gilt $\det \mathbf{H}g(\mathbf{x}^0) < 0$, so haben die beiden Eigenwerte von $\mathbf{H}g(\mathbf{x}^0)$ ein unterschiedliches Vorzeichen, d.h. $\mathbf{x}^0$ ist ein Sattelpunkt von $g(\mathbf{x})$.

c) Gilt $\det \mathbf{H}g(\mathbf{x}^0) = 0$, so ist der stationäre Punkt $\mathbf{x}^0$ von $g(\mathbf{x})$ ausgeartet.

$f(x,y) = x^2 + y^2 = 0 \qquad (x_0,y_0) = (0,0)$

$\operatorname{grad} f = 2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$ in $(0,0)$ Singulär

$H_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \det H_f > 0$ isolierter Punkt

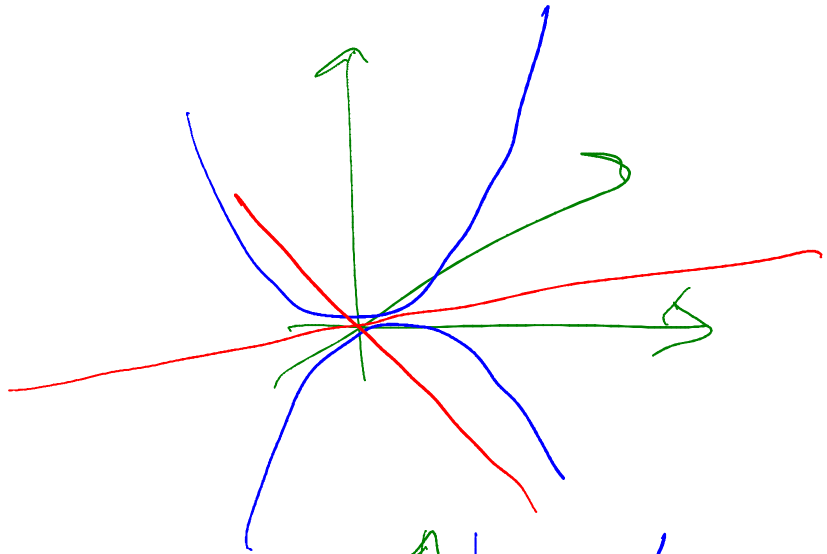


$f(x,y) = x^2 - y^2 = 0 \qquad (x_0,y_0) = (0,0) \qquad y = x,\ y = -x$

$\operatorname{grad} f = 2\begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = 0$ in $(0,0)$ Singulär

$H_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \det H(0,0) < 0$ Doppelpunkt

$(x_0,y_0) = (1,1) \qquad \operatorname{grad} f(1,1) \neq 0$ regulär

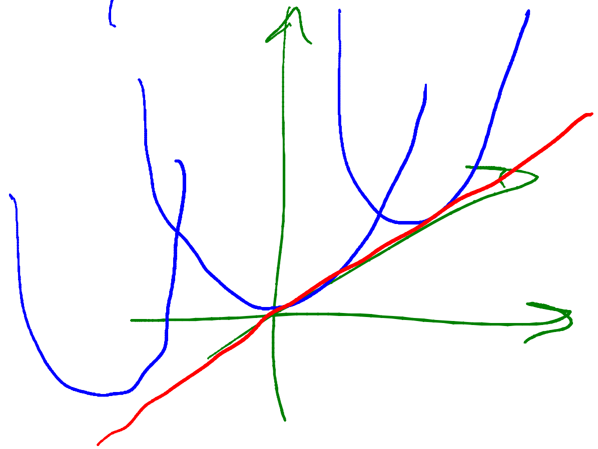


$f(x,y) = x^2 = 0 \qquad (x_0,y_0) = (0,0)$

$\operatorname{grad} f = 2\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ in $(0,0)$ Singulär

$H_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \det H_f = 0$ Spitze

$(x,y) = (0,y)$ sind sing.



Beispiel 1.

Betrachte den singulären Punkt $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$ der impliziten Gleichung $g(0,0)=0$

$$g(x,y) = y^2(x-1) + x^2(x-2) = 0$$

Berechnung der partiellen Ableitungen bis zur Ordnung 2:

$$\begin{aligned}
g_x &= y^2 + 3x^2 - 4x \\
g_y &= 2y(x-1) \\
g_{xx} &= 6x - 4 \\
g_{xy} &= 2y \\
g_{yy} &= 2(x-1) \\
\mathbf{H}g(\mathbf{0}) &= \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$\operatorname{grad} g(0,0) = 0$ singulär

Also ist $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$ ein isolierter Punkt.

$$f(x,y) = y^2(x-1) + x^2(x-2) = 0$$

$x = 0 \Rightarrow y = 0$

$x = 2 \Rightarrow y = 0$

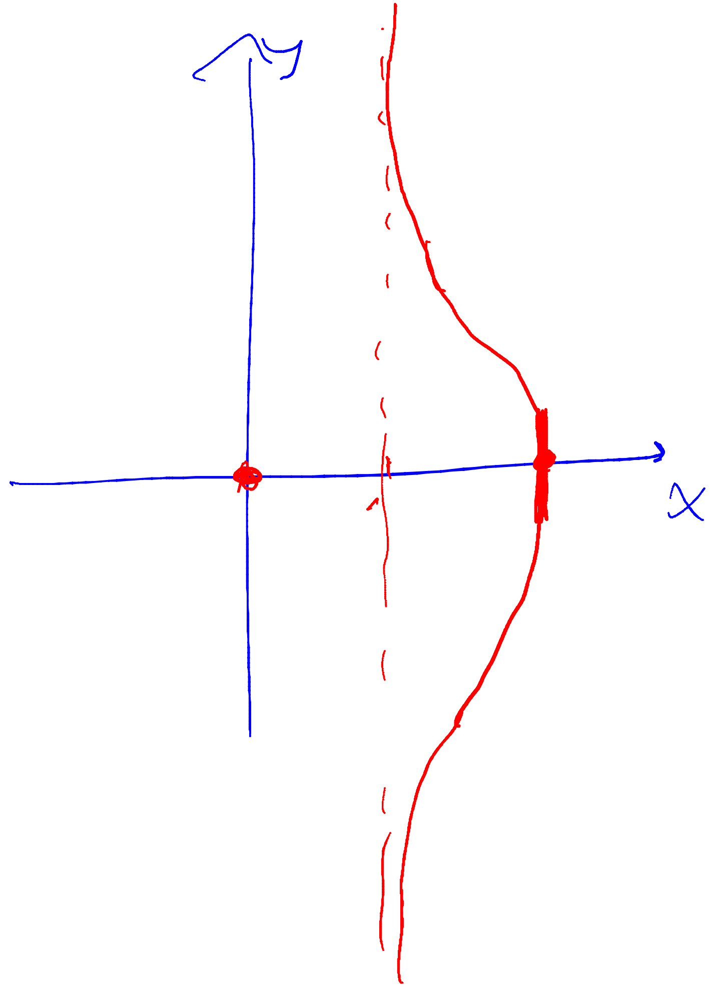
$$y^2 = -\frac{x^2(x-2)}{x-1}$$

mouth

$1 < x < 2$

$\operatorname{grad} f(2,0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad f_y = 0$

regular



Beispiel 2.

Betrachte den singulären Punkt $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$ der impliziten Gleichung $g(0,0)=0$

$$g(x, y) = y^2(x-1) + x^2(x+q^2) = 0$$

Berechnung der partiellen Ableitungen bis zur Ordnung 2:

$$\begin{aligned}
g_x &= y^2 + 3x^2 + 2xq^2 \\
g_y &= 2y(x-1) \\
g_{xx} &= 6x + 2q^2 \\
g_{xy} &= 2y \\
g_{yy} &= 2(x-1) \\
\mathbf{H}g(\mathbf{0}) &= \begin{pmatrix} 2q^2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

grad $g(0,0)=0$

Also ist $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$ für $q \neq 0$ ein Doppelpunkt.

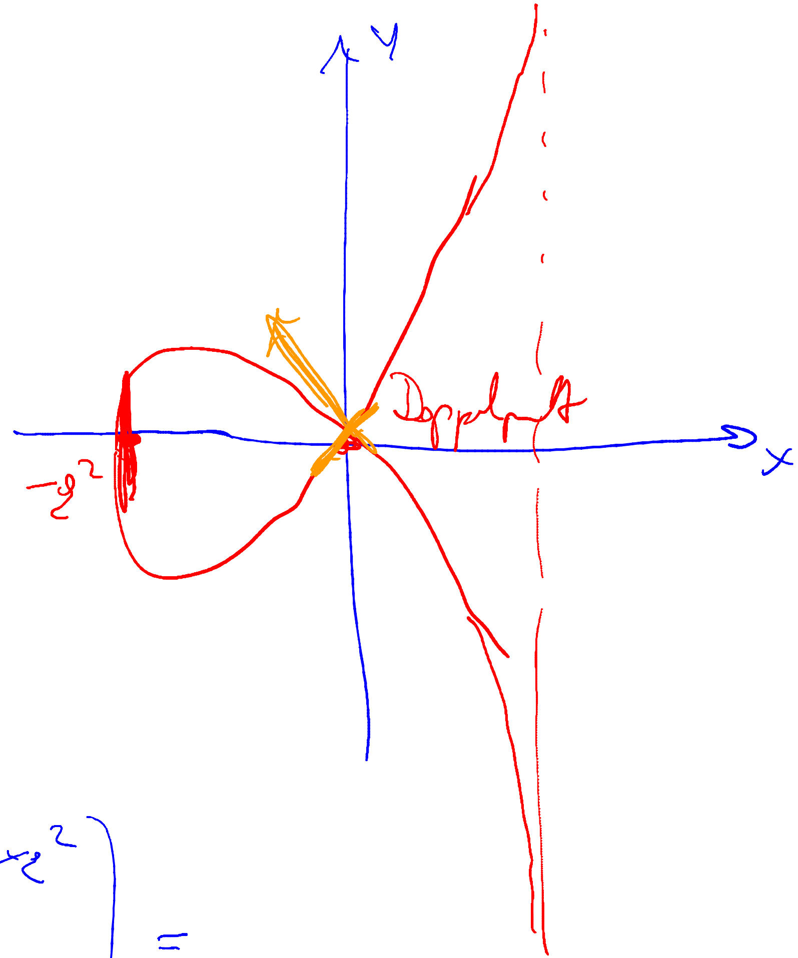
$$f(x,y) = y^2(x-1) + x^2(x+\varepsilon^2) = 0$$

$x=0 \Rightarrow y=0$

$x=-\varepsilon^2 \Rightarrow y=0$

$$y^2 = -\frac{x^2(x+\varepsilon^2)}{x-1} \qquad -\varepsilon^2 < x < 1$$

$$\operatorname{grad} f(-\varepsilon^2, 0) = \begin{pmatrix} \varepsilon^4 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad f_y = 0 \Rightarrow \text{vertikale Tangente}$$



$$\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} y^2+3x^2+2x\varepsilon^2 \\ 2y(x-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{x^2(x+\varepsilon^2)}{x-1} + 3x^2 + 2x\varepsilon^2 \\ 2\sqrt{-\frac{x^2(x+\varepsilon^2)}{x-1}}\,(x-1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{-x^2(x+\varepsilon^2)+3x^3-3x^2+2x^2\varepsilon^2-2x\varepsilon^2}{x-1} \\ 2\sqrt{-x^2(x+\varepsilon^2)(x-1)} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -2x\varepsilon^2 \\ 2\sqrt{x^2\varepsilon^2} \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} -\varepsilon^2 \\ \varepsilon \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} -\varepsilon \\ 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel 3.

Betrachte den singulären Punkt $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$ der impliziten Gleichung

$$g(x,y) = y^2(x-1) + \underline{x^3} = 0$$

Berechnung der partiellen Ableitungen bis zur Ordnung 2:

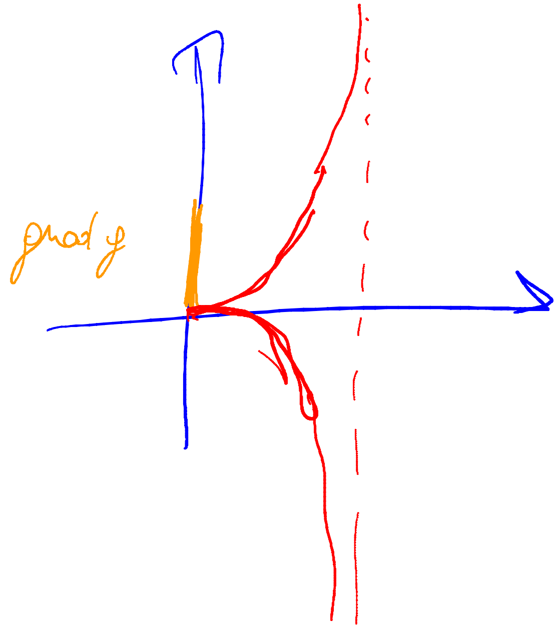
$$\begin{aligned}
g_x &= y^2 + 3x^2 \\
g_y &= 2y(x-1) \\
g_{xx} &= 6x \\
g_{xy} &= 2y \\
g_{yy} &= 2(x-1) \\
\mathbf{H}g(\mathbf{0}) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Also ist $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$ eine Spitze (bzw. ein Rückkehrpunkt).

$$f(x,y) = y^2(x-1) + x^3 = 0$$

$x=0 \Rightarrow y=0$ monoton

$$y^2 = -\frac{x^3}{x-1} \qquad 0 < x < 1$$



$$\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} y^2+3x^2 \\ 2y(x-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{x^3}{x-1} + 3x^2 \\ 2\sqrt{-\frac{x^3}{x-1}}\,(x-1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{-x^3+3x^3-3x^2}{x-1} \\ 2\sqrt{-x^3(x-1)} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \frac{-3x^2}{-1} \\ 2\sqrt{\cancel{-x^4}+x^3} \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} x^2 \\ 2x^{3/2} \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} x^{\frac{1}{2}} \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{x\to 0} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$f(x,y) = 0$

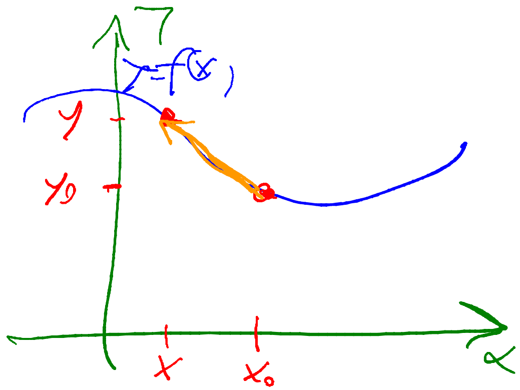
$f(x_0,y_0) = 0$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0 \qquad y = f(x)$

$$0 = f(x,y) = \underbrace{f(x_0,y_0)}_{=0} + \underbrace{\operatorname{grad} f(x_0,y_0) \cdot \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}}_{\approx 0} + \dots$$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$

Tangentenvektor



$\Rightarrow \operatorname{grad} f(x,y) \perp$ Tangentenvektor

Implizite Darstellung von Flächen.

- Die Lösungsmenge einer skalaren Gleichung $g(x,y,z)=0$ ist für $\operatorname{grad} g \neq \mathbf{0}$ *lokal* eine Fläche im $\mathbb{R}^3$.

- Für die Tangentialebene in $\mathbf{x}^0=(x^0,y^0,z^0)^T$ mit $g(\mathbf{x}^0)=0$ und $\operatorname{grad} g(\mathbf{x}^0)\neq \mathbf{0}^T$ bekommen wir für $\Delta\mathbf{x}^0=\mathbf{x}-\mathbf{x}^0$ mit Taylor–Entwicklung

$0 = f(x,y) = \underbrace{f(x_0,y_0)}_{=0} +$

$$\operatorname{grad} g\cdot\Delta\mathbf{x}^0 = g_x(\mathbf{x}^0)(x-x^0)+g_y(\mathbf{x}^0)(y-y^0)+g_z(\mathbf{x}^0)(z-z_0)=0$$

$\operatorname{grad} f(x_0,y_0,z_0)\begin{pmatrix}x-x_0\\ y-y_0\\ z-z_0\end{pmatrix}=0$

d.h. der Gradient steht senkrecht auf der Fläche $g(x,y,z)=0$.

- Ist zum Beispiel $g_z(\mathbf{x}^0)\neq 0$, so gibt es lokal bei $\mathbf{x}^0$ eine Darstellung der Form

$$\Rightarrow \qquad z=f(x,y)$$

und für die partielle Ableitungen von $f(x,y)$ bekommt man

$$\operatorname{grad} f(x,y)=(f_x,f_y)=-\frac{1}{g_z}(g_x,g_y)=\left(-\frac{g_x}{g_z},\frac{g_y}{g_z}\right)$$

mit dem Satz über implizite Funktionen.

$$0 = g(x,y,z(x,y))$$

$$0 = \operatorname{grad}_{(x,y)} g(x,y,z(x,y)) = \begin{pmatrix} g_x + g_z z_x \\ g_y + g_z z_y \end{pmatrix} = g_z \begin{pmatrix} \frac{g_x}{g_z} + z_x \\ \frac{g_y}{g_z} + z_y \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} z_x \\ z_y \end{pmatrix} = -\frac{1}{g_z} \begin{pmatrix} g_x \\ g_y \end{pmatrix}$$

Das Umkehrproblem.

Frage: Lässt sich ein vorgegebenes Gleichungssystem

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

$f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

mit $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, nach $\mathbf{x}$ auflösen, also **invertieren**?

Satz: (Umkehrsatz)

Sei $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, eine $\mathcal{C}^1$–Funktion. Ist für ein $\mathbf{x}^0 \in D$ die Jacobi–Matrix $\mathbf{J}\,\mathbf{f}(\mathbf{x}^0)$ regulär, so gibt es Umgebungen U und V von $\mathbf{x}^0$ und $\mathbf{y}^0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}^0)$, so dass $\mathbf{f}$ den Bereich U **bijektiv** auf V abbildet.

Die Umkehrfunktion $\mathbf{f}^{-1} : V \to U$ ist ebenfalls eine $\mathcal{C}^1$–Funktion und es gilt für alle $\mathbf{x} \in U$:

$$\mathbf{J}\,\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y}) = (\mathbf{J}\,\mathbf{f}(\mathbf{x}))^{-1}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

Bemerkung: Man nennt dann $\mathbf{f}$ lokal einen $\mathcal{C}^1$–Diffeomorphismus.

$$y = f(x)$$

$$g(x,y) = f(x) - y = 0$$

nach x auflösen falls $\frac{\partial g}{\partial x} = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}}_{n \times n}$ invertierbar

$$x = \bar{f}(y) = f^{-1}(y)$$

$$g(\bar{f}(y), y) = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial \bar{f}}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial \bar{f}}{\partial y} = -\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^{-1}\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right) = -\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{-1}(-I) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{-1}$$

$$\frac{\partial f^{-1}}{\partial y}$$