

Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften Blatt 7, Präsenzaufgaben

Aufgabe 1:

a) Sei \mathbf{f} das Vektorfeld $\mathbf{f}(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix}$, \mathbf{c}_1 die Kurve mit der Parametrisierung

$$\mathbf{c}_1(t) = (t, \sin(t)) \quad t \in [0, \pi]$$

und \mathbf{c}_2 der mathematisch positiv orientierte Rand des Rechtecks

$$R = \{(x, y) : x \in [0, 1], y \in [0, 2]\} = [0, 1] \times [0, 2].$$

- (i) Besitzt f ein Potential?
- (ii) Berechnen Sie für $i = 1, 2$ die Kurvenintegrale

$$\int_{\mathbf{c}_i} \mathbf{f}(x, y) d(x, y).$$

- (iii) Berechnen Sie den Fluss von \mathbf{f} aus R heraus.

b) Sei $\tilde{\mathbf{f}}$ das Vektorfeld $\tilde{\mathbf{f}}(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 - y^3 \\ y^2 + x^3 \end{pmatrix}$. \mathbf{c}_2 sei wie oben definiert und

$$\mathbf{c}_3(t) = (1, t^2) \quad t \in [0, 3]$$

Berechnen Sie die Kurvenintegrale

$$\int_{\mathbf{c}_2} \tilde{\mathbf{f}}(x, y) d(x, y), \quad \int_{\mathbf{c}_3} \tilde{\mathbf{f}}(x, y) d(x, y).$$

Lösung

$$\text{a) (i) } \operatorname{rot} \mathbf{f} = \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} = 0.$$

Konstruktion eines Potentials:

$$\begin{aligned} f_1(x, y) = x^2 = \phi_x(x, y) &\implies \phi(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + C(y) \\ f_2(x, y) = y^2 = 0 + C_y(y) = \phi_y(x, y) &\implies C_y(y) = y^2, \text{ z. B. } C(y) = \frac{1}{3}y^3 \\ &\implies \phi(x, y) = \frac{1}{3}(x^3 + y^3) \end{aligned}$$

$$\text{(ii) } \int_{c_1} \mathbf{f} d(x, y) = \phi(c_1(\pi)) - \phi(c_1(0)) = \phi\left(\begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}\right) - \phi\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \frac{\pi^3}{3}$$

Da c_2 geschlossen ist, gilt $\oint_{c_2} \mathbf{f} d(x, y) = 0$

(iii) Für den Fluss von R heraus gilt

$$\begin{aligned} F &= \int_0^1 \int_0^2 \operatorname{div} \mathbf{f}(x, y) dy dx = \int_0^1 \int_0^2 2x + 2y dy dx = \int_0^1 [2xy + y^2]_0^2 dx \\ &= \int_0^1 4x + 4 dx = 6. \end{aligned}$$

$$\text{b) } \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{f}} = \frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial y} = 3x^2 + 3y^2.$$

Zur direkten Berechnung des Kurvenintegrals von $\tilde{\mathbf{f}}$ über c_2 müsste man die Randstücke parametrisieren und Kurvenintegrale über die einzelnen Kanten Berechnen. Einfacher geht es mit dem Satz von Green:

$$\begin{aligned} \int_{\partial R} \tilde{\mathbf{f}}(x, y) d(x, y) &= \int_R \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{f}}(x, y) d(x, y) = \int_0^1 \int_0^2 3x^2 + 3y^2 dy dx \\ &= \int_0^1 [3x^2y + y^3]_0^2 dx = \int_0^1 [6x^2 + 8] dx = [2x^3 + 8x]_0^1 = 10. \end{aligned}$$

Für c_3 rechnen wir direkt:

$$\mathbf{c}_3(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t^2 \end{pmatrix} \quad \dot{\mathbf{c}}_3(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2t \end{pmatrix} \quad \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{c}_3(t)) = \begin{pmatrix} \ddots \\ t^4 + 1 \end{pmatrix}$$

$$\int_{c_3} \tilde{\mathbf{f}}(x, y) d(x, y) = \int_0^3 \langle \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{c}_3(t)), \dot{\mathbf{c}}_3(t) \rangle dt = \int_0^3 2t(t^4 + 1) dt = \left[\frac{t^6}{3} + t^2 \right]_0^3 = 3^5 + 3^2 = 252.$$

Aufgabe 2)

Gegeben sei

$$K := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 16, y \geq 0 \right\},$$

und das Vektorfeld

$$\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \mathbf{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + y^2 \\ 2y \\ 3z + x^2 \end{pmatrix}.$$

- a) Berechnen Sie $\int_K \operatorname{div} \mathbf{f}(x, y, z) d(x, y, z)$.
- b) K ist berandet durch ein ebenes Flächenstück W und ein gewölbtes Flächenstück M . Geben Sie eine Parametrisierung von W an.
- c) Berechnen Sie den Fluss von \mathbf{f} durch W , also

$$\int_W \mathbf{f} \cdot dO.$$

- d) Wie groß ist nach a) und c) der Fluss durch den gewölbten Teil des Randes von K , also

$$\int_M \mathbf{f} \cdot dO?$$

Lösung:

- a) $\operatorname{div} \mathbf{f}(x, y, z) = 1 + 2 + 3 = 6$.

Parametrisierung von K :

$$\text{Kugelkoordinaten: } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \cos(\theta) \\ r \sin(\varphi) \cos(\theta) \\ r \sin(\theta) \end{pmatrix}$$

$$0 \leq r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \leq 16 \implies r \in [0, 4], \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$y = r \sin(\varphi) \cos(\theta) \geq 0 \implies \varphi \in [0, \pi]$$

$$\begin{aligned} \int_K \operatorname{div} \mathbf{f}(x, y, z) d(x, y, z) &= \int_0^4 \int_0^\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 6 \cdot r^2 \cos(\theta) d\theta d\varphi dr \\ &= \int_0^4 \int_0^\pi 6r^2 [\sin(\theta)]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi dr \\ &= \int_0^4 12r^2 [\varphi]_0^\pi dr = 4\pi \int_0^4 3r^2 dr = 4\pi(4^3 - 0^3). \end{aligned}$$

- b) Parametrisierung von W : Kreisscheibe mit Radius 4 um Null und $y = 0$.

$$p(r, \theta) = (r \cos(\theta), 0, r \sin(\theta))^T, \theta \in [0, 2\pi], 0 \leq r \leq 4.$$

$$c) \frac{\partial p}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ 0 \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial p}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} -r \sin(\theta) \\ 0 \\ r \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} \times \frac{\partial p}{\partial r} = \begin{pmatrix} 0 \\ -r \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -r \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{f}(p(r, \theta)) \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -r \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \dots \\ 0 \\ \dots \end{pmatrix} \right\rangle = 0.$$

$$\text{Also } \int_W \mathbf{f} \cdot dO = 0.$$

d) Mit dem Satz von Gauß ergibt sich aus a) und b)

$$\int_M \mathbf{f} \cdot dO = \int_K \operatorname{div} \mathbf{f}(x, y, z) d(x, y, z) - \int_W \mathbf{f} \cdot dO = 4^4 \pi.$$

Bearbeitungstermine: 27.01–31.01.25