

Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften Blatt 7, Hausaufgaben

Aufgabe 1:

Gegeben seien die Vektorfelder $\mathbf{f}, \mathbf{g} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{g} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + z \\ y^2 z + z^3 \\ -y \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{f} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xz \\ -2yz \\ x^2 - y^2 \end{pmatrix}$$

- a) Berechnen Sie Potentiale zu \mathbf{f} und \mathbf{g} , falls dies möglich ist.
b) Berechnen Sie für

$$\mathbf{c} : [0, \frac{\pi}{6}] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} t \\ \cos(3t) \\ \sin(3t) \end{pmatrix}.$$

die Kurvenintegrale

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f} d\mathbf{x}, \quad \text{und} \quad \int_{\mathbf{c}} \mathbf{g} d\mathbf{x}.$$

Lösungsskizze:

a)

Potential zu \mathbf{f} : [3 Punkte]

$$\Phi_x = 2xz \iff \Phi(x, y, z) = x^2 z + C(y, z)$$

$$\begin{aligned} \Phi_y = C_y(y, z) = -2yz &\iff C(y, z) = -y^2 z + d(z) \iff \Phi(x, y, z) \\ &= (x^2 - y^2)z + d(z) \end{aligned}$$

$$\Phi_z = x^2 - y^2 + d'(z) = x^2 - y^2 \iff d(z) = k \iff \Phi(x, y, z) = (x^2 - y^2)z + k.$$

Zum Beispiel an $(g_1)_z = 1 \neq 0 = (g_3)_x$ sieht man, dass \mathbf{g} kein Potential besitzt.
[1 Punkt]

b)

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f} d\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{c}(\pi/6)) - \Phi(\mathbf{c}(0)) = \Phi \begin{pmatrix} \frac{\pi}{6} \\ \cos(\frac{\pi}{2}) \\ \sin(\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} - \Phi \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(0) \\ \sin(0) \end{pmatrix} \quad [1 \text{ Punkt}]$$

$$= \Phi \begin{pmatrix} \frac{\pi}{6} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \Phi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\pi^2}{36} \quad [1 \text{ Punkt}]$$

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{g} d\mathbf{x} = \int_0^{\pi/6} \langle \mathbf{g}(c(t)), \dot{\mathbf{c}}(t) \rangle dt \quad \dot{\mathbf{c}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \sin(3t) \\ 3 \cos(3t) \end{pmatrix} \quad [1 \text{ Punkt}]$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{c}(t)) = \begin{pmatrix} t^2 + \sin(3t) \\ \cos^2(3t) \sin(3t) + \sin^3(3t) \\ -\cos(3t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 + \sin(3t) \\ \sin(3t) \\ -\cos(3t) \end{pmatrix} \quad [1 \text{ Punkt}]$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{c}(t))^T \cdot \dot{\mathbf{c}}(t) = t^2 + \sin(3t) - 3 \sin^2(3t) - 3 \cos^2(3t) = t^2 + \sin(3t) - 3 \quad [1 \text{ Punkt}]$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{c}} \mathbf{g} d\mathbf{x} &= \int_0^{\pi/6} (t^2 + \sin(3t) - 3) dt = \left[\frac{t^3}{3} - \frac{\cos(3t)}{3} - 3t \right]_0^{\pi/6} \\ &= \frac{\pi^3}{3 \cdot 6^3} - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}. \quad [1 \text{ Punkt}] \end{aligned}$$

Aufgabe 2:

Gegeben sei der Körper $K := \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 5 - x + y, \}$

und das Vektorfeld $\mathbf{f}(\mathbf{x}) := (xz, yz, xyz)^T$.

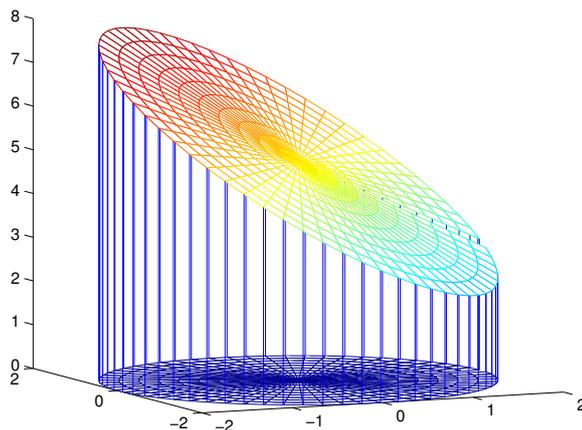
- Skizzieren Sie K und geben Sie Parametrisierungen für die drei glatten Flächenstücke F_1 , F_2 und F_3 an, die K beranden.
- Berechnen Sie das Volumenintegral $\int_K \operatorname{div} \mathbf{f} d\mathbf{x}$.
- Berechnen Sie den Fluss von \mathbf{f} durch die Flächenstücke F_1 , F_2 und F_3 .

Lösung:

- $x^2 + y^2 \leq 4$: Zylinder mit Radius 2, Achse = z -Achse

Nach unten begrenzt durch $z \geq 0$ also x, y -Ebene

Nach oben begrenzt durch Ebene $z = 5 - x + y$



Parametrisierung $F_1 =$ Boden: Kreisscheibe in x, y -Ebene um Null

$$p_1(r, \phi) = \begin{pmatrix} r \cos \phi \\ r \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r \in [0, 2], \phi \in [0, 2\pi]$$

Parametrisierung $F_2 =$ Mantel: $x^2 + y^2 = 4, 0 \leq z \leq 5 - x + y$

$$p_2(\phi, z) = \begin{pmatrix} 2 \cos \phi \\ 2 \sin \phi \\ z \end{pmatrix}, \quad \phi \in [0, 2\pi], z \in [0, 5 - 2 \cos \phi + 2 \sin \phi]$$

Parametrisierung $F_3 =$ Dach:

Projektion auf x, y -Ebene = Kreisscheibe, $z = 5 - x + y$

$$p_3(r, \phi) = \begin{pmatrix} r \cos \phi \\ r \sin \phi \\ 5 - r \cos \phi + r \sin \phi \end{pmatrix}, \quad r \in [0, 2], \phi \in [0, 2\pi]$$

- b) $K : x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi, \quad r \in [0, 2], \quad \phi \in [0, 2\pi],$
 $0 \leq z \leq 5 - r \cos \phi + r \sin \phi$
 $\operatorname{div} \mathbf{f}(x, y, z) = z + z + xy$

$$\begin{aligned} \int_K \operatorname{div} \mathbf{f} d(x, y, z) &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{5-r \cos \phi + r \sin \phi} (2z + r^2 \sin \phi \cos \phi) \cdot r dz d\phi dr \\ &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} r(5 - r \cos \phi + r \sin \phi)^2 + r^3(5 - r \cos \phi + r \sin \phi) \sin \phi \cos \phi d\phi dr \\ &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} r(25 - 10r \cos \phi + 10r \sin \phi + r^2 - 2r^2 \sin \phi \cdot \cos \phi) d\phi dr \\ &\quad + \int_0^2 r^3 \int_0^{2\pi} \frac{5}{2} \sin(2\phi) - r \cos^2 \phi \sin \phi + r \sin^2 \phi \cos \phi d\phi dr \\ &= 2\pi \int_0^2 25r + r^3 dr = 2\pi(50 + 4) = 108\pi \end{aligned}$$

- c) Fluss durch F_1 :

$$\frac{\partial p_1}{\partial r} \times \frac{\partial p_1}{\partial \phi} = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r \sin \phi \\ r \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}$$

Äußere Normale weist nach unten. Also wähle

$$\mathbf{n}_1 = \frac{\partial p_1}{\partial \phi} \times \frac{\partial p_1}{\partial r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) := (xz, yz, xyz)^T.$$

$$\mathbf{f}(p_1(r, \phi)) = \mathbf{f}(r \cos \phi, r \sin \phi, 0) = (0, 0, 0)^T$$

$$\langle \mathbf{f}(p_1(r, \phi)), \mathbf{n}_1 \rangle = 0 \implies \int_{F_1} \mathbf{f} dO = 0$$

Durch den Boden fließt nichts!

Fluss durch F_2 :

$$\frac{\partial p_2}{\partial \phi} \times \frac{\partial p_2}{\partial z} = \begin{pmatrix} -2 \sin \phi \\ 2 \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cos \phi \\ 2 \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

Äußere Normale weist nach außen. Vorzeichen des Kreuzproduktes stimmt also!

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) := (xz, yz, xyz)^T.$$

$$\mathbf{f}(p_2(\phi, z)) = \mathbf{f}(2 \cos \phi, 2 \sin \phi, z) = (2z \cos \phi, 2z \sin \phi, \dots)^T$$

$$\langle f(p_2(\phi, z)), \mathbf{n}_2 \rangle = 4z \cos^2(\phi) + 4z \sin^2(\phi) = 4z$$

$$\begin{aligned} \int_{F_2} \mathbf{f} dO &= \int_0^{2\pi} \int_0^{5-2\cos\phi+2\sin\phi} 4z dz d\phi = \int_0^{2\pi} [2z^2]_0^{5-2\cos\phi+2\sin\phi} d\phi \\ &= 2 \int_0^{2\pi} 25 - 20\cos\phi + 20\sin\phi + 4(\sin\phi - \cos\phi)^2 d\phi \\ &= 100\pi + 2 \int_0^{2\pi} 4(\sin^2\phi - 2\sin\phi\cos\phi + \cos^2\phi) d\phi = 100\pi + 16\pi \end{aligned}$$

Den Fluss durch F_3 kann man als Differenz des Gesamtflusses aus Teil b) und den Fluss durch F_1 und F_2 berechnen:

$$\int_{F_3} \mathbf{f} dO = 108\pi - \int_{F_2} \mathbf{f} dO - \int_{F_1} \mathbf{f} dO = -8\pi$$

Da man genauso gut zunächst den Fluss für F_1 und F_3 rechnen könnte, um anschließend den Fluss durch F_2 mit Hilfe von Teil b) zu berechnen, wird hier der Fluss durch F_3 zu Kontrollzwecken auch nochmals direkt berechnet.

$$p_3(r, \phi) = (r \cos \phi, r \sin \phi, 5 - r \cos \phi + r \sin \phi)^T$$

$$\frac{\partial p_3}{\partial r} \times \frac{\partial p_3}{\partial \phi} = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ -\cos \phi + \sin \phi \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r \sin \phi \\ r \cos \phi \\ r \sin \phi + r \cos \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ -r \\ r \end{pmatrix}.$$

Äußere Normale weist nach oben. Vorzeichen des Kreuzproduktes stimmt also!

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) := (xz, yz, xyz)^T.$$

$$\mathbf{f}(p_3(r, \phi)) = (5 - r \cos \phi + r \sin \phi)(r \cos \phi, r \sin \phi, r^2 \cos \phi \cdot \sin \phi)^T$$

$$\langle \mathbf{f}(p_3(r, \phi)), \mathbf{n}_3 \rangle = r(5 - r \cos \phi + r \sin \phi)(r^2 \cos \phi \cdot \sin \phi + r \cos \phi - r \sin \phi)$$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{f}(p_3(r, \phi)), \mathbf{n}_3 \rangle &= r^2 \left[\frac{5}{2} r \sin(2\phi) + 5(\cos \phi - \sin \phi) + r \sin(2\phi) - r \right. \\ &\quad \left. - r^2 \cos^2 \phi \cdot \sin \phi + r^2 \cos \phi \cdot \sin^2 \phi \right] \end{aligned}$$

Da die Stammfunktionen von $\sin(2\phi)$, $\cos(\phi)$ und $\sin(\phi)$ alle 2π -periodisch sind, lassen wir bei der folgenden Integration direkt die entsprechenden Summanden weg.

$$\begin{aligned} \int_{F_3} \mathbf{f} dO &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \langle \mathbf{f}(p_3(r, \phi)), \mathbf{n}_3 \rangle d\phi dr \\ &= - \int_0^2 \int_0^{2\pi} r^3 (1 + r \cos^2 \phi \cdot \sin \phi - r \cos \phi \cdot \sin^2 \phi) d\phi dr \\ &= \int_0^2 -r^3 \left(\phi - r \frac{\cos^3 \phi}{3} - \frac{\sin^3 \phi}{3} \right) \Big|_0^{2\pi} dr = -2\pi \frac{2^4}{4} = -8\pi \end{aligned}$$

Abgabetermine: 27.01.–31.01.25