Analysis III
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 6, Präsenzaufgaben

Aufgabe 1: *Bereichsintegrale, Erinnerung an Divergenz wg. Gauß, Transform. Polarkoord.*

a) Gegeben sind der wie folgt beschriebene Körper $K \subset \mathbb{R}^3$ und das Vektorfeld $\boldsymbol{f}$:

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \; x \in [1,3], \;\; 1-x \leq y \leq 2+x, \;\; x^2+y^2-1 \leq z \leq x^2+y^2+1 \right\},$$

$$\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad \boldsymbol{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz+y \\ x(z+1)+y \\ y(z+2)+x \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie

$$\int_K \operatorname{div}(\boldsymbol{f}(x,y,z))\,\mathrm{d}(x,y,z).$$

b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_D (1-x^2)d(x,y)$$

über dem Kreisring $\quad D := \left\{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2;\; 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\right\}.$

Hinweis: $\cos^2\phi = \dfrac{1}{2}\left(\cos(2\phi)+1\right).$

Lösung:

a) $\operatorname{div} \boldsymbol{f}(x,y,z) = (f_1)_x + (f_2)_y + (f_3)_z = 0+1+y\,.$

$$\begin{aligned}
\int_K \operatorname{div}\boldsymbol{f}(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z) &= \int_1^3 \int_{1-x}^{2+x} \int_{x^2+y^2-1}^{x^2+y^2+1} (1+y)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int_1^3 \int_{1-x}^{2+x} [(1+y)z]_{x^2+y^2-1}^{x^2+y^2+1}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int_1^3 \int_{1-x}^{2+x} 2(1+y)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_1^3 \left[(1+y)^2\right]_{1-x}^{2+x}\mathrm{d}x \\
&= \int_1^3 \left((3+x)^2-(2-x)^2\right)\,\mathrm{d}x = \int_1^3 (9+6x+x^2-4+4x-x^2)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_1^3 (5+10x)\,\mathrm{d}x = \left[5x+5x^2\right]_1^3 = 5(12-2) = 50.
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\int\limits_D (1-x^2)\,d(x,y) &= \int\limits_1^2 \int\limits_0^{2\pi} (1-r^2\cos^2\varphi)r\,d\varphi\,dr \\
&= 2\pi \int\limits_1^2 r\,dr - \int\limits_1^2 r^3 \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{2}\Big(\underbrace{\cos(2\varphi)}_{\substack{\text{liefert 0 da } \sin(2\varphi) \\ \pi\text{-periodisch}}} +1\Big) d\varphi\,dr \\
&= 3\pi - \pi \int\limits_1^2 r^3\,dr = 3\pi - \pi\cdot\frac{15}{4} = -\frac{3}{4}\pi
\end{aligned}$$

Aufgabe 2:

Gegeben sei der Kegel $K \subset \mathbb{R}^3$, $\quad K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq 4 - 4\sqrt{x^2+y^2} \right\}$.

Der Kegel habe die Konstante Dichte $\rho = 2$.

a) Berechnen Sie die Masse des Kegels.

b) Berechnen Sie das Trägheitsmoment des Kegels bezüglich der $z-$ Achse mittels Integration.

Lösung zu Aufgabe 2) Transformation: $x = r\cos(\varphi)$, $y = r\sin(\varphi)$, $z = z$.

Für die Jacobi-Matrix J der Koordinatenransformation gilt $\det \boldsymbol{J} = r$

Für die Parameter gilt: $r \in [0,1]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $z \in [0, 4-4r]$.

a) Für die Masse des homogenen Kegels gilt:

$$m = \int_K \rho d(x,y,z) = \rho \int_K 1\, d(x,y,z) = \rho \cdot \text{ Volumen } (K)$$

Wer die Formel für das Kegelvolumen $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ benutzt, erhält direkt:

$m = 2\,\frac{1}{3}\pi 1^2 \cdot 4 = \dfrac{8\pi}{3}$.

Wer die Formel nicht kennt oder üben möchte zu Integrieren, rechnet:

$$\begin{aligned} m &= \int_0^1 \int_0^{4-4r} \int_0^{2\pi} \rho \cdot r\, d\varphi\, dz\, dr = 2 \cdot \int_0^1 \int_0^{4-4r} r\ [\varphi]_0^{2\pi}\ dz\, dr \\ &= 4\pi \cdot \int_0^1 r\ [z]_0^{4-4r}\ dr = 4\pi \int_0^1 4r - 4r^2\, dr = 4\pi \left[2r^2 - \frac{4}{3} r^3\right]_0^1 = \frac{8\pi}{3}. \end{aligned}$$

b) Für den Abstand $a(x,y,z)$ des Punktes $(x,y,z)^T$ zur $z-$ Achse erhält man:
$a(x,y,z)^2 = x^2 + y^2 = r^2$.

Für das gesuchte Trägheitsmoment rechnet man:

$$\begin{aligned} \Theta_z &= \int_0^1 \int_0^{4-4r} \int_0^{2\pi} \rho \cdot r^2 \cdot r\, d\varphi\, dz\, dr = 2 \cdot \int_0^1 \int_0^{4-4r} r^3\ [\varphi]_0^{2\pi}\ dz\, dr \\ &= 4\pi \cdot \int_0^1 r^3\ [z]_0^{4-4r}\ dr = 4\pi \int_0^1 4r^3 - 4r^4\, dr = 4\pi \left[r^4 - \frac{4}{5} r^5\right]_0^1 = \frac{4\pi}{5}. \end{aligned}$$

Bearbeitungstermine: 13.01–17.01.25