Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2024/25**
Prof. Dr. I. Gasser, Dr. H. P. Kiani

Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 5, Präsenzaufgaben

Aufgabe 1: Gegeben ist das folgende Optimierungsproblem:

$$\begin{array}{rl} \text{Bestimmen Sie die Minima von} & f(x,y) \;=\; 1-2xy \\ \text{unter der Nebenbedingung} & g(x,y) = x^2+4y^2-8 \le 0\,. \end{array} \tag{1}$$

a) Gibt es lokale Minima im Innern des zulässigen Bereiches, d.h. für $x^2+4y^2-8<0$? Begründen Sie ihre Antwort.
(Hinweis: lokale Minima im Innern der zulässigen Menge sind auch lokale Minima des unrestringierten Problems: $\min_{x,y\in\mathbb{R}} \quad f(x,y)=1-2xy$.)

b) Bestimmen Sie alle globalen Minima von f unter der Nebenbedingung

$$g(x,y) = \; x^2+4y^2-8 \;=\; 0$$

mit Hilfe der Lagrangeschen Multiplikatoren-Regel. Überprüfen Sie zunächst die Regularitätsbedingung.

Bemerkung: Die Aufgabe kann natürlich auch durch Elimination einer der Variablen gelöst werden. Hier soll aber an einem einfachen Beispiel die neu eingeführte Lösungsmethode geübt werden.

c) Geben Sie alle globalen Minima des Optimierungsproblems (1) an.
(Hinweis: nutzen Sie a) und b))

Lösung: (Angegebene Punkteverteilung aus einer ähnlichen alten Klausuraufgabe)
a) Notwendige Bedingung für Minimum im Innern:

$$\mathbf{grad}\, f(x,y) = (-2y,\,-2x) = (0,0)\;, \qquad \text{also} \qquad x=y=0\,.$$ **[1 Punkt]**

Hinreichende Bedingung überprüfen:

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ist indefinit} \;\Rightarrow\; \text{kein Minimum.}$$ **[1 Punkt]**

b) Regularitätsbedingung:

$\mathbf{grad}\, g(x,y) = (2x, 8y) \ne (0,0)^T$ auf der zulässigen Menge erfüllt. **[1 Punkt]**

Eine notwendige Bedingung für (lokale) Optimalität lautet daher:

$$\begin{aligned} \mathbf{grad}\, F(x,y) = \mathbf{grad}\,(f(x,y)+\lambda g(x,y)) = \begin{pmatrix} -2y \\ -2x \end{pmatrix}^T + \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 8y \end{pmatrix}^T &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T \\ g(x,y) = x^2+4y^2-8 \qquad\qquad &= 0\,. \end{aligned}$$

[**1 Punkt**]

Gleichungssystem lösen:

$x \cdot I \;:\qquad -2xy + 2\lambda x^2 = 0$

$y \cdot II :\qquad -2xy + 8\lambda y^2 = 0$

Bildet man die Differenz dieser Gleichungen, folgt

$\lambda(8y^2 - 2x^2) = 0 \implies \lambda = 0 \vee x^2 = 4y^2\,.$

$\lambda = 0$ entspricht dem unrestringierten Fall und liefert wieder den inneren Punkt $(0,0)$. Dieser ist hier, in Teil b), nicht zulässig.

Also muss $x^2 = 4y^2$ gelten. Dies eingesetzt in die Nebenbedingung ergibt:

$x^2 + 4y^2 = \;4y^2 + 4y^2 \overset{!}{=} 8 \implies y = \pm 1\,.$

Und damit $x^2 = 4y^2 = 4$, also $x = \pm 2\,.$

Wir erhalten also vier Kandidaten für lokale Extrema:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\,, \quad P_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\,, P_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \quad P_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}\,.$$

Berechnung der Kandidaten : [**3 Punkte**]

Es gilt $f(P_1) = f(P_2) = 5$ und $f(P_3) = f(P_4) = -3$. Weil die stetige Funktion f auf dem Kompaktum

$$\left\{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \;:\; x^2 + 4y^2 - 8 = 0\right\}$$

ihr Minimum annimmt, liegen in P_3 und P_4 globale Minima vor. Mit demselben Argument schließt man, dass in P_1 und P_2 globale Maxima vorliegen müssen. Sie scheiden daher als lokale Minima aus.
[**2 Punkte**]

Alternativ, wenn auch unnötig aufwändig, könnte man hinreichende Bedingungen 2. Ordnung überprüfen.

c) Da auch

$$\left\{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \;:\; x^2 + 4y^2 - 8 \le 0\right\}$$

kompakt ist, nimmt auch hier die Funktion f ihr Minimum an. Allerdings nicht im Innern (siehe a)). Also liegt das globale Minimum von f auf dem Rand. Wegen b) kommen dafür nur P_3 und P_4 in frage. Weil wiederum $f(P_3) = f(P_4)$ gilt, liegen in beiden Punkten globale Minima für (1). [**1 Punkt**]

Aufgabe 2: Gesucht seien die Extrema der Funktion

$$f(x,y) \;=\; 2\,\ln\left(\frac{x}{y}\right) \;+\; x \;+\; 5y$$

unter der Nebenbedingung

$$g(x,y) \;=\; x\,y \;-1 \;= 0.$$

a) Zeigen Sie, dass $(x_0,y_0)^T \;=\; (1,1)^T$ mit einem geeigneten festen λ ein zulässiger, stationärer Punkt der Lagrange–Funktion $F \;=\; f +\, \lambda\, g$ ist und überprüfen Sie die Regularitätsbedingung im Punkt $(x_0,y_0)^T \;=\; (1,1)^T$.

b) Untersuchen Sie den stationären Punkt $(x_0,y_0)^T \;=\; (1,1)^T$ auf seinen Typ hin. Stellen Sie dazu die Hesse–Matrix $\boldsymbol{H}_{\,x,y}F(x_0,y_0)$ auf und überprüfen Sie deren Definitheit auf dem Tangentialraum $\ker\left(Dg(x_0,y_0)\right)$.

Lösung:

a) Es gilt $g(1,1) = 1-1 = 0$. Der Punkt $(x_0,y_0)^T \;=\; (1,1)^T$ ist also zulässig. [**1 Punkt**]

$\nabla g(x,y) \;=\; \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \;\Longrightarrow\; \nabla g(1,1) \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Die Regularitätsbedingung ist also erfüllt. [**1 Punkt**]

Für f rechnet man

$$\nabla f(x,y) = = \begin{pmatrix} 2\,\frac{\frac{1}{y}}{\frac{x}{y}} \;+\; 1 \\[2ex] 2\,\frac{\frac{-x}{y^2}}{\frac{x}{y}} \;+\; 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,\dfrac{1}{x} \;+\; 1 \\[2ex] 2\,\dfrac{-1}{y} \;+\; 5 \end{pmatrix}. \qquad \textbf{[1 Punkte]}$$

Somit erhält man für einen zulässigen stationären Punkt der Lagrange-Funktion $F = f + \lambda g$ das Gleichungssystem:

$$F_x = \frac{2}{x} \;+\; 1 \;+\; \lambda y \;=\; 0\,,$$

$$F_y = \frac{-2}{y} \;+\; 5 \;+\; \lambda x \;=\; 0\,,$$

$$g = xy \;-\; 1 \;=\; 0\,. \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

Für $x \;=\; y \;=\; 1$ also

$$F_x(1,1):\; \frac{2}{1} \;+\; 1 \;+\; \lambda \;=\; 0 \iff \lambda = -3\,,$$

$$F_y(1,1) = \frac{-2}{1} \;+\; 5 \;+\; \lambda \;=\; 0 \iff \lambda = -3\,,$$

$$g(1,1) = 1 \;-\; 1 \;=\; 0\,. \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

$(1,1)^T$ ist also ein stationärer Punkt der Lagrange-Funktion mit zugehörigem Multiplikator $\lambda = -3$.

b) Mit $\lambda = -3$ gilt für die Hesse Matrix:

$$\boldsymbol{H}_{x,y}F(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{x^2} & \lambda \\ \lambda & \frac{2}{y^2} \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

d.h. $\boldsymbol{H}_{x,y}F(1,1)$ ist indefinit ($\det \boldsymbol{H}_{x,y}F(1,1) = -13$). **[1 Punkt]**

Tangentialraum:
$\boldsymbol{v} = \binom{x}{y}$ mit $\nabla g(1,1)^T \cdot \binom{x}{y} = 0 \Rightarrow x + y = 0$. **[1 Punkt]**

Auf dem Tangentialraum:

$$(1,-1)\,\boldsymbol{H}_{x,y}F(1,1)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (1,-1)\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (1,-1)\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} = 6 > 0.$$

[1 Punkt]

d.h. die Hesse-Matrix $\boldsymbol{H}_{x,y}F(1,1)$ ist positiv definit auf dem Tangentialraum. Daher liegt im Punkt $(1,1)$ ein strenges lokales Minimum vor.
[1 Punkt]

Bearbeitung: 16.–20.12 .24