Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2024/25**
Prof. Dr. I. Gasser
Dr. H. P. Kiani

Analysis III
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 5, Hausaufgaben

Aufgabe 1: (vgl. Vorlesung Folie 95 ff)

Bestimmen Sie die globalen Extrema der Funktion

$$f(x,y,z) = xy + z^2$$

auf dem Schnitt der Zylinderoberfläche

$$g(x,y,z) \;=\; x^2 + y^2 - 8 \;=\; 0$$

mit der Ebene

$$h(x,y,z) \;=\; x - y + 2z - 1 \;=\; 0.$$

Hinweis: Überprüfen Sie zunächst die Regularitätsbedingung.

Lösung 1:
$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= xy + z^2 \stackrel{!}{=} \min / \max \\ g(x,y,z) &= x^2 + y^2 - 8 = 0 \\ h(x,y,z) &= x - y + 2z - 1 = 0 \end{aligned}$$

Regularitätsbedingung: [2 Punkte]

$$\text{Rang}\begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 2$$

erfüllt $\forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$g(0,0,z) = -8 \neq 0 \Rightarrow$ Punkte mit $x = y = 0$ sind nicht zulässig.
Die Regularitätsbedingung ist in allen zulässigen Punkten erfüllt.

Zu lösen: [2 Punkte]

$$\begin{aligned} \mathbf{grad}(f + \lambda g + \mu h) &= 0 \\ g = h &= 0 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{rrcrcrcl} I) & y & + & \lambda \cdot 2x & + & \mu & = & 0 \\ II) & x & + & \lambda \cdot 2y & - & \mu & = & 0 \end{array}\right\} \quad y + 2\lambda x + x + 2\lambda y = 0$$

$$\begin{array}{rcrcrcll} 2z & + & \lambda \cdot 0 & + & 2\mu & = & 0 & \Rightarrow \quad \boxed{\mu = -z} \\ x & - & y & + & 2z & = & 1 & \Rightarrow \quad \boxed{z = \frac{1}{2}(1 - x + y)} \\ & & x^2 & + & y^2 & = & 8 & \end{array}$$

Neues System : [1 Punkt] $\mu = z = -\frac{1}{2}(1-x+y)$

$$\begin{array}{rrcl} I+II & (1+2\lambda)\,(x+y) & = & 0 \;\Rightarrow\; x=-y \;\vee\; \lambda = -\dfrac{1}{2} \\ \text{setze } \mu = -\dfrac{1}{2}(1-x+y) \text{ in } I) & 2\lambda x + y - \dfrac{1}{2}(1-x+y) & = & 0 \\ & x^2+y^2 & = & 8 \end{array}$$

Berechnung $P_1, \cdots P_4$ **: [3 Punkte]**

1. Fall $y = -x:$

$$\begin{array}{rcl} 2\lambda x - x - \dfrac{1}{2}(1-x-x) & = & 0 \\ x^2+x^2 & = & 8 \;\Rightarrow\; x^2 = 4 \quad x = \pm 2 \quad z = \dfrac{1}{2}(1-2x) \end{array}$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \quad P_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

$$f(P_1) = -4 + \frac{9}{4} = -\frac{7}{4} \qquad f(P_2) = -4 + \frac{25}{4} = \frac{9}{4}$$

2. Fall $\lambda = -\dfrac{1}{2}$, noch zu erfüllen: $\left\{ \begin{array}{rcl} -x+y-\frac{1}{2}+\frac{x}{2}-\frac{y}{2} & = & 0 \\ x^2+y^2 & = & 8 \end{array} \right.$

$-x+y=1 \qquad \boxed{y = 1+x}$

$z = \dfrac{1}{2}(1-x+y) = 1 \qquad \boxed{z=1}$

$x^2+y^2 = 2x^2+2x+1 = 8 \;\Rightarrow\; 2x^2+2x-7=0$

$x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+14}}{2} = \dfrac{-1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{15}}{2}\,, \qquad y = \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{15}}{2}$

$$P_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1+\sqrt{15} \\ 1+\sqrt{15} \\ 2 \end{pmatrix} \qquad P_4 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1-\sqrt{15} \\ 1-\sqrt{15} \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rcl} f(P_3) & = & \dfrac{1}{4}\left(\sqrt{15}-1\right)\left(\sqrt{15}+1\right)+1 \\ & = & \dfrac{1}{4}(15-1)+1 = \dfrac{9}{2} \\ f(P_4) & = & \dfrac{1}{4}\left(-\sqrt{15}+1\right)\left(-\sqrt{15}-1\right)+1 = \dfrac{9}{2} \end{array}$$

Der Schnitt eines Zylindermantels mit einer (nicht zur Achse paralellen) Ebene ist beschränkt und abgeschlossen $\Rightarrow$ Max/Min werden angenommen.[**1 Punkt**]

Es liegen globale Maxima in P_3 und P_4 und ein globales Minimum in P_1 vor. [**1 Punkt**]

Aufgabe 2: Gegeben ist das nichtlineare Gleichungssystem

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) := \begin{pmatrix} 4x_1^3 - 27x_1 x_2^2 + 25 \\ 4x_1^2 - 3x_2^3 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie eine Näherung für eine nahe $\boldsymbol{x}^{[0]} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ gelegene Lösung des Systems, in dem Sie ausgehend von $\boldsymbol{x}^{[0]}$ mindestens zwei Schritte des Newtonverfahrens durchführen.

Lösungsskizze:

Iterationsvorschrift: Bei gegebenem Punkt $\boldsymbol{x}^{[k]}$

- Berechne $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{[k]})$,
- Berechne die Jacobi-Matrix $\boldsymbol{J}\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{[k]})$,
- Löse das Gleichungssystem $\boldsymbol{J}\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{[k]}) \cdot \Delta^{[k]} = -\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{[k]})$
- Setze $\boldsymbol{x}^{[k+1]} = \boldsymbol{x}^{[k]} + \Delta^{[k]}$.

Es gilt $\qquad \boldsymbol{J}\,\boldsymbol{f}(x) = \begin{pmatrix} 12x_1^2 - 27x_2^2 & -54x_1 x_2 \\ 8x_1 & -9x_2^2 \end{pmatrix}$

Mit dem gegebenen Startvektor erhält man:

$$\boldsymbol{J}\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{[0]})\Delta^{[0]} = \begin{pmatrix} -15 & -54 \\ 8 & -9 \end{pmatrix} \cdot \Delta^{[0]} = -\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = -\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{[0]})$$

Mit der Lösung $\Delta^{[0]} = \begin{pmatrix} \frac{2}{63} \\ \frac{16}{567} \end{pmatrix} \implies \boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} \frac{65}{63} \\ \frac{583}{567} \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{J}\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1)\Delta^{[1]} \approx \begin{pmatrix} -15.77131 & -57.28647 \\ 8.253968 & -9.515103 \end{pmatrix} \cdot \Delta^{[1]} = \begin{pmatrix} 0.05833573 \\ 0.00320282 \end{pmatrix} \approx -\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{[1]})$$

$$\boldsymbol{x}^{[2]} = \boldsymbol{x}^{[1]} + \Delta^{[1]} \approx \begin{pmatrix} 1.031149 \\ 1.027364 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{[2]}) \approx \begin{pmatrix} -4.421 \times 10^{-5} \\ -5.331 \times 10^{-6} \end{pmatrix},$$

Matlab liefert die folgenden Iterierten:

$$\begin{aligned} x_2 &= 1.031149486465732\,, & y_2 &= 1.027364611917862\,, \\ x_3 &= 1.031149301112460\,, & y_3 &= 1.027363890384895 \\ x_4 &= 1.031149301112562\,, & y_4 &= 1.027363890384492 \\ x_5 &= 1.031149301112562\,, & y_5 &= 1.027363890384492 \\ f_5 &= (0, 0.444089209850063 \cdot 10^{-15}) \end{aligned}$$

Abgabe: 16.–20.12.24