Analysis III
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 4, Präsenzaufgaben

Aufgabe 1: Bestimmen Sie die stationären Punkte der folgenden Funktionen und klassifizieren Sie diese. Prüfen Sie also, ob es sich jeweils um ein Minimum, ein Maximum oder einen Sattelpunkt handelt.

a) $f(\boldsymbol{x}) := \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A}\, \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{x} + c$ mit

$$\boldsymbol{x} := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{A} := \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} := \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \end{pmatrix}, \quad c = 2024,$$

b)

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad g(x,y) := x^3 + y^3 - 27xy + 25.$$

Lösung zu 1:

a)

$$f(x,y) = (x,y) \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (6,-8) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2024 = 9x^2 - 6xy + 4y^2 + 6x - 8y + 2024.$$

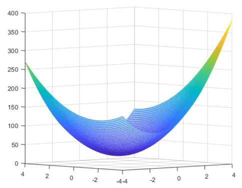
$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 18x - 6y + 6 = 0 \iff y - 1 = 3x. \\ f_y(x,y) &= -6x + 8y - 8 = -6x + 8(y-1) = -6x + 8 \cdot 3x = 0 \Longrightarrow x = 0 \\ &\Longrightarrow y - 1 = 0 \Longrightarrow y = 1. \end{aligned}$$

Die Hessematrix $\boldsymbol{H} f(x,y) = \begin{pmatrix} 18 & -6 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}$ mit
$\det(\boldsymbol{H}(x,y)) = 18 \cdot 8 - 36 = 18 \cdot 6 > 0$ und $(\boldsymbol{H} f(x,y))_{11} = 18 > 0$
ist positiv definit. Also liegt ein Minimum vor.

Alternativ:

$$\begin{aligned} \det(\boldsymbol{H}(x,y) - \lambda \boldsymbol{I}) = (18-\lambda)(8-\lambda) - 36 = 0 &\iff 144 - 26\lambda + \lambda^2 - 36 = 0 \\ \iff \lambda^2 - 2 \cdot 13 \cdot \lambda + 108 = 0 &\iff (\lambda - 13)^2 = 61. \end{aligned}$$

Die Hessematrix hat die zwei positiven Eigenwerte $\lambda_{1,2} = 13 \pm \sqrt{61}$. Also liegt ein Minimum vor.



b) $g(x,y) := x^3 + y^3 - 27xy + 25$.

$$g_x(x,y) = 3x^2 - 27y \stackrel{!}{=} 0 \iff x^2 = 9y$$
$$g_y(x,y) = 3y^2 - 27x \stackrel{!}{=} 0 \iff y^2 = 9x \iff x = \frac{y^2}{9}$$

Es gilt also
$$\frac{y^4}{9^2} = 9y \iff y^4 - 9^3 y = 0 \iff y = 0 \lor y = 9\,.$$
Damit erhalten wir zwei stationäre Punkte $P_1 = (0,0)$ und $P_2 = (9,9)$.

$$H\,g(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -27 \\ -27 & 6y \end{pmatrix},$$
$$H\,g(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -27 \\ -27 & 0 \end{pmatrix}, \quad H\,f(9,9) = \begin{pmatrix} 54 & -27 \\ -27 & 54 \end{pmatrix}.$$

Für die Eigenwerte der Hessematrix von P_1 gilt
$$\lambda^2 - 27^2 = 0 \implies \lambda = \pm 27$$

Hier liegt ein Sattelpunkt vor.

Für die Hesse Matrix von P_2 gilt

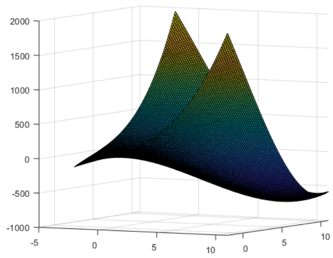
– Hauptunterdeterminanten der Hessematrix sind positiv,

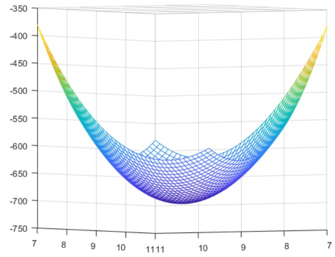
– alternativ: Gerschgorin

– alternativ: Eigenwerte berechnen

$$(54-\lambda)^2 - 27^2 = 0 \iff 54 - \lambda = \pm 27 \implies \lambda = 54 \pm 27 > 0$$

In P_2 liegt ein (lokales) Minimum der Funktion.





Aufgabe 2:

Es sei $g(x,y) := y^2 \cdot x - y \cdot \exp(x+y) + 2$.

a) Zeigen Sie, dass durch $g(x,y) = 0$ in der Umgebung von $P_0 = (-1,1)$ implizit eine Funktion $y(x)$ definiert ist. Es gilt also lokal

$$g(x,y) = 0 \Longrightarrow y = f(x), \quad f(-1) = 1\,.$$

b) Bestimmen Sie das Taylor-Polynom ersten Grades der Funktion $f(x)$ zum Entwicklungspunkt $x_0 = -1$.

c) Berechnen Sie $f'(-1)$ mittels impliziter Differentiation.

d) Durch die Relation $g(x,y) = y^2 \cdot x - y \cdot \exp(x+y) + 2 = 0$ ist eine Kurve im $\mathbb{R}^2$ implizit gegeben.

Warum ist es ausgeschlossen, dass P_0 ein singulärer Punkt der Kurve ist?

Prüfen Sie ob die Kurve im Punkt P_0 eine horizontale oder eine vertikale Tangente hat.

Lösung zu Aufgabe 2)

a) $$g(x,y) = y^2 \cdot x - y \cdot \exp(x+y) + 2 = 0$$

Zunächst stellen wir wegen $g(-1,1) = 1^2 \cdot (-1) - (1) \cdot \exp(-1+1) + 2 = -1 - 1 + 2 = 0$ fest, dass P_0 die Gleichung erfüllt.

Mit $\quad g_y(x,y) = 2yx - \exp(x+y) - y \cdot \exp(x+y)$

gilt in P_0: $\quad g_y(-1,1) = -2 - 1 - 1 = -4 \neq 0.$

Nach dem Satz über implizite Funktionen gibt es daher lokal eine Funktion f mit

$$g(x,y) = 0 \Longrightarrow y = f(x), \quad f(-1) = 1\,.$$

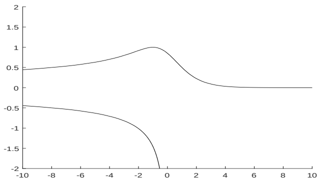
b) Es gilt

$$f'(x) = -g_x/g_y = -\frac{y^2 - y\exp(x+y)}{2xy - \exp(x+y) - y\exp(x+y)} \Longrightarrow$$

$$f'(-1) = \frac{1 - 1\exp(0)}{-4} = 0$$

und damit

$$T_1(x;-1) = f(-1) + f'(-1)(x+1) = 1\,.$$



c) Alternativ kann man in b) $f'(-1)$ mittels impliziter Differentiation berechnen. Auf der Lösungskurve gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\, g(x, y(x)) &= \frac{d}{dx}\, \Big(y(x)^2 \cdot x - y(x) \cdot \exp(x + y(x)) + 2\Big) \\ &= 2y(x)y'(x) \cdot x + y(x)^2 - y(x)' \cdot \exp(x + y(x)) - y(x) \cdot \exp(x + y(x)) \cdot (1 + y'(x)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Einsetzen von $x = -1$ und $y(-1) = 1$ ergibt:

$$-2y'(-1) + 1 - y'(-1) \cdot \exp(0) - \exp(0) \cdot (1 + y'(-1)) \;=\; -4y'(-1) \;= 0.$$

Also $f'(-1) \;=\; y'(-1) \;=\; 0\,.$

d) Da wir in a) gezeigt haben, dass die Voraussetzungen des Satzes über implizite Funktionen für mindestens eine Variable erfüllt sind, kann kein singulärer Punkt vorliegen.

Aus Teil a) wissen wir bereits, dass der P_0 auf der Kurve liegt und dass $g_y(-1, 1) \neq 0$ gilt. Wir prüfen noch g_x :

$g_x(x, y) = y^2 - y\exp(x + y)$, also $g_x(-1, 1) = 1^2 - 1 \cdot \exp(-1 + 1) = 1 - e^0 = 0\,.$

Es liegt also ein Punkt mit horizontaler Tangente vor.

Bearbeitung: 02.–06.12 .24