Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2024/25**
Prof. Dr. I. Gasser
Dr. H. P. Kiani

Analysis III
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 4, Hausaufgaben

Aufgabe 1:

Durch die Relation $g(x,y) = x^4 - x^2 + y^2 = 0$ ist eine Kurve im $\mathbb{R}^2$ implizit gegeben. Bestimmen Sie die Symmetrien dieser Kurve, die singulären Punkte (+ Klassifikation) und die Kurvenpunkte mit horizontaler bzw. vertikaler Tangente.

Lösung:

Wegen $g(x,y) = g(-x,y) = g(x,-y) = g(-x,-y)$ ist die Kurve symmetrisch zur $y-$ Achse, zur $x-$ Achse und zum Ursprung.

i) Singuläre Punkte:

$g_x(x,y) = 4x^3 - 2x = 0 \iff x = 0 \vee x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$g_y(x,y) = 2y = 0 \iff y = 0$

Kandidaten: $P_0 = \binom{0}{0}$, $P_1 = \binom{\frac{1}{\sqrt{2}}}{0}$, $P_2 = \binom{-\frac{1}{\sqrt{2}}}{0}$

Für P_0 gilt $g(P_0) = 0$. Es handelt sich also um einen singulären Punkt.

Wegen $g(P_{1,2}) = -\frac{1}{4} \neq 0$ liegen die anderen zwei Kandidaten nicht auf der Kurve.

Zur Klassifikation des singulären Punktes P_0 berechnet man die zweiten Ableitungen:

$g_{xx}(x,y) = 12x^2 - 2$, $g_{xy}(x,y) = 0$, $g_{yy}(x,y) = 2$

und die Hessematrix im singulären Punkt: $Hf(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Da diese indefinit ist, handelt es sich um einen Doppelpunkt.

ii) Punkte mit horizontaler Tangente:Wir haben bereits oben berechnet

$g_x = 0,\ g_y \neq 0 \iff x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \wedge y \neq 0$.

Zu erfüllen bleibt noch $g(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, y) = -\frac{1}{4} + y^2 = 0$

Damit erhält man die Punkte $P_{3,4} = \binom{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\pm\frac{1}{2}}$ und $P_{5,6} = \binom{-\frac{1}{\sqrt{2}}}{\pm\frac{1}{2}}$

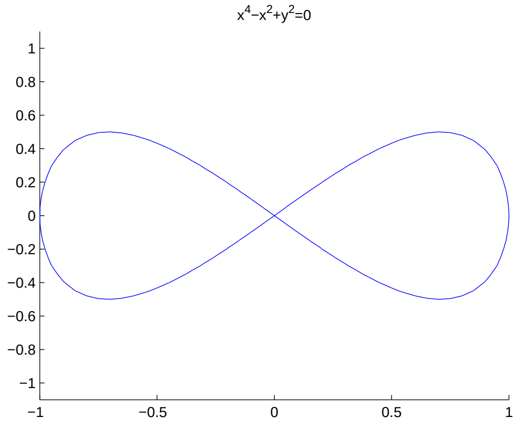
iii) Punkte mit vertikaler Tangente:

Aus i) wissen wir $g_y = 0 \iff y = 0$. Der Punkt muss auf der Kurve liegen, also:

$x^4 - x^2 = x^2(x^2 - 1) = 0 \iff x = 0 \quad \vee \quad x = \pm 1$

Der Punkt $\binom{0}{0}$ ist ein singulärer Punkt. Punkte mit vertikaler Tangente sind also

$P_{7,8} = \binom{\pm 1}{0}$.



Aufgabe 2: Gegeben sei $g(x,y) := x^4 + y^4 + 8xy = 0\,.$

a) (i) Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen, dass $g(x,y)$ in der Nähe von $(x_0, y_0)^T := (2,-2)^T$ nach y aufgelöst werden kann. Das heißt, dass es eine Funktion $f(x)$ mit $f(2) = -2$ gibt, so dass in geeigneten Umgebungen von x_0 bzw. y_0 folgende Äquivalenz gilt

$$g(x,y) = 0 \iff y = f(x)\,.$$

(ii) Berechnen Sie das Taylor Polynom ersten Grades der Funktion f aus Teil i) zum Entwicklungspunkt $x_0 = 2\,.$

(iii) Berechnen Sie das Taylor Polynom zweiten Grades der Funktion f aus Teil i) zum Entwicklungspunkt $x_0 = 2\,.$

b) Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen, dass die Lösungsmenge von

$$g(x,y,z) := (x^2 - 2e^{xy})z + 2 = 0$$

in einer Umgebung des Punktes $P_0 := (x_0, y_0, z_0)^T := (0,1,1)^T$ nach x aufgelöst werden kann. Das heißt, dass es eine Funktion $f(y,z)$ mit $f(1,1) = 0$ gibt, so dass in geeigneten Umgebungen von x_0, y_0, z_0 folgende Äquivalenz gilt

$$g(x,y,z) = 0 \iff x = f(y,z)\,.$$

Nach welcher(n) anderen Variablen kann nach dem Satz über implizite Funktionen aufgelöst werden?

Lösungsskizze Aufgabe 2:

a) (i) $g(2,-2) = 0\,.$

$$\boldsymbol{J}\, g(x,y) = \mathbf{grad}\, g(x,y) = \begin{pmatrix} 4x^3 + 8y \\ 4y^3 + 8x \end{pmatrix}^T \implies \boldsymbol{J}\, g(2,-2) = \begin{pmatrix} 32 - 16 \\ -32 + 16 \end{pmatrix}^T \implies$$

In der Nähe von $(2,-2)^T$ kann man sowohl nach y als auch nach x auflösen.

(ii) $T_1(x;2) = f(2) + f'(2)(x-2)$

Für das Taylor Polynom ersten Grades brauchen wir noch $f'(2)$. Nach dem Satz über implizite Funktionen gilt

$$f'(x) = -g_x/g_y = -\frac{4x^3 + 8y}{4y^3 + 8x} \implies f'(2) = -\,\frac{16}{-16} = 1\,.$$

Alternativ : implizites Differenzieren

$$g(x, y(x)) = x^4 + (y(x))^4 + 8xy(x) = 0$$

$$\frac{d}{dx} g(x,y(x)) = 4x^3 + 4(y(x))^3 y'(x) + 8y(x) + 8xy'(x)$$

$$= (4x^3 + 8y(x)) + (4(y(x))^3 + 8x)y'(x) = 0$$

$$\implies y'(x) = -\,\frac{4x^3 + 8y}{4y^3 + 8x}$$

$$T_1(x;2) = y(2) + y'(2)(x-2) = -2 + (x-2)$$

(iii) $T_1(x;2) = y(2) + y'(2)(x-2)$

Für das Taylor Polynom zweiten Grades brauchen wir noch $f''(2)$. Dazu leiten wir

$$\frac{d}{dx}g(x,y(x)) = 4x^3 + 8y(x) + (4(y(x))^3 + 8x)y'(x) = 0$$

noch ein mal ab

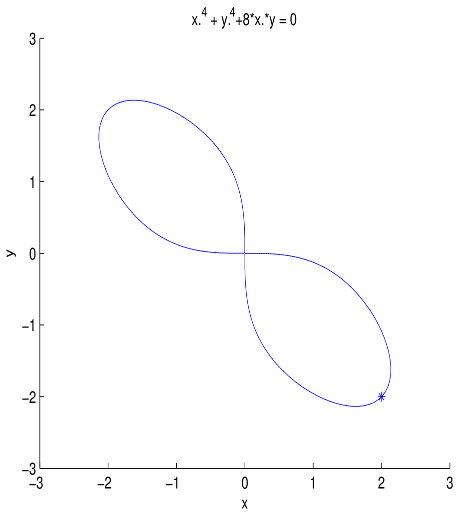
$$\frac{d^2}{dx^2}g(x,y(x)) = 12x^2 + 8y'(x) + \Big(12(y(x))^2(y'(x)) + 8\Big)\, y'(x) + \Big(4(y(x))^3 + 8x\Big)\, y''(x) = 0$$

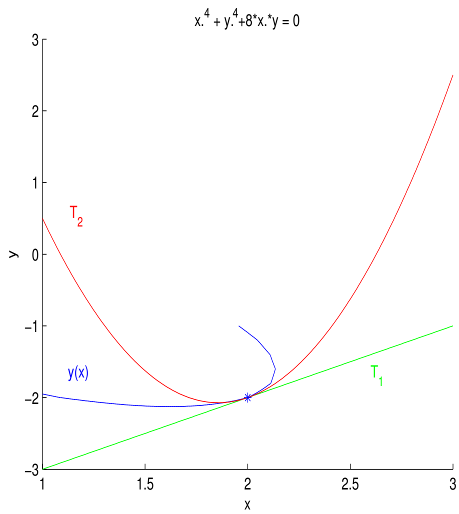
Hierin setzen wir $x = 2, y(2) = -2$ und $y'(2) = 1$ ein und erhalten

$$48 + 8 + 48 + 8 + (-32 + 16)y''(2) = 0 \implies y''(2) = -\frac{112}{-16} = 7$$

und damit

$$T_2(x;2) = y(2) + y'(2)(x-2) + \frac{1}{2}y''(2)(x-2)^2 = -2 + (x-2) + \frac{7}{2}(x-2)^2$$





b) Als Jacobi-Matrix von g ergibt sich

$$\mathbf{J}g(x,y,z) = \Big((2x - 2ye^{xy})z, \quad -2xze^{xy}, \quad x^2 - 2e^{xy}\Big)$$

und daher gilt $\mathbf{J}g(0,1,1) = (-2, 0, -2)$.

Weil $\frac{\partial g}{\partial x}(0,1,1) = -2$ bzw. $\frac{\partial g}{\partial z}(0,1,1) = -2$ als 1×1-Matrizen invertierbar sind, gibt es nach dem Satz über implizite Funktionen auf geeigneten Umgebungen von P_0

eine Funktion $x(y,z)$ mit $x(1,1) = 0$ und $g(x(y,z), y, z) = 0$ und
eine Funktion $z(x,y)$ mit $z(0,1) = 1$ und $g(x, y, z(x,y)) = 0$.

Der Satz macht keine Aussage darüber, ob lokal nach y aufgelöst werden kann. Eine explizite Auflösung der Formel $g = 0$ nach y ergibt

$y = \frac{1}{x} \cdot \ln\left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{z}\right)$.

Dieser Ausdruck ist in keiner Umgebung von $(x_0, z_0) = (0,1)^T$ definiert.

Abgabe: 02.–06.12.24