Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2024/25**
Prof. Dr. I. Gasser
Dr. H. P. Kiani

Analysis III
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 3, Präsenzaufgaben

Aufgabe 1)

Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) := x \cdot y^2 + \cos(x+y) + 2y + 3\,.$$

a) Bestimmen Sie das Taylor-Polynom zweiten Grades T_2 von f zum Entwicklungspunkt $(x_0, y_0) = (0,0)$.

b) Zeigen Sie, dass für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $|x| \leq 0.2$ und $|y| \leq 0.2$ gilt:

$$|f(x,y) - T_2(x,y)| \leq \frac{4}{100}\,.$$

c) Geben Sie das Taylor-Polynom dritten Grades T_3 von f zum Entwicklungspunkt $(x_0, y_0) = (0,0)$ an und zeigen Sie, dass für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $|x| \leq 0.2$ und $|y| \leq 0.2$ gilt:

$$|f(x,y) - T_3(x,y)| \leq \frac{2}{1000}\,.$$

Lösung:

a)

$$\begin{array}{ll}
f(x,y) = x \cdot y^2 + \cos(x+y) + 2y + 3 & f(0,0) = 4 \\
f_x(x,y) = y^2 - \sin(x+y) & f_x(0,0) = 0 \\
f_y(x,y) = 2xy - \sin(x+y) + 2 & f_y(0,0) = 2 \\
f_{xx}(x,y) = -\cos(x+y) & f_{xx}(0,0) = -1 \\
f_{xy}(x,y) = 2y - \cos(x+y) & f_{xy}(0,0) = -1 \\
f_{yy}(x,y) = 2x - \cos(x+y) & f_{yy}(0,0) = -1
\end{array}$$

$$T_2(x,y) = 4 + 2y - \frac{x^2}{2} - xy - \frac{y^2}{2}\,.$$

b) Für die Fehlerabschätzung berechnen wir für die Beträge aller dritten Ableitungen eine, für alle $(x,y) \in D$ gültige, gemeinsame obere Schranke.

$$\begin{aligned}
|\, f_{xxx}(x,y)\,| &= |\sin(x+y)\,| \leq 1 \\
|\, f_{xxy}(x,y)\,| &= |\sin(x+y)\,| \leq 1 \\
|\, f_{xyy}(x,y)\,| &= |\,2 + \sin(x+y)\,| \leq 2 + 1 = 3 \\
|\, f_{yyy}(x,y)\,| &= |\sin(x+y)\,| \leq 1.
\end{aligned}$$

Die Beträge aller dritten Ableitungen von f, in allen Punkten aus D, sind also nach oben durch $C := 3$ beschränkt.

Der Fehler $|f(x,y) - T_2(x,y)|$ kann wie folgt abgeschätzt werden:

$$|f(x,y) - T_2(x,y)| \leq \frac{2^3}{3!} \cdot \|(x,y)\|_\infty^3 \cdot C \leq \frac{8}{6} \cdot \frac{2^3}{10^3} \cdot 3 = \frac{8 \cdot 2^2}{1000} = \frac{32}{1000} < \frac{4}{100}.$$

c) Mit den dritten Ableitungen aus Teil b) ergibt sich

$f_{xxx}(0,0) = f_{xxy}(0,0) = f_{yyy}(0,0) = 0, \qquad f_{xyy}(0,0) = 2.$

Damit erhalten wir

$$T_3(x,y) = T_2(x,y) + \frac{1}{3!} \cdot 3 f_{xyy}(0,0) x y^2 = 4 + 2y - \frac{x^2}{2} - xy - \frac{y^2}{2} + xy^2.$$

Alle vierten Ableitungen ergeben sich als $\cos(x+y)$, so dass wir mit $\tilde{C} = 1$ wie folgt abschätzen können:

$$|f(x,y) - T_3(x,y)| \leq \frac{2^4}{4!} \cdot \|(x,y)\|_\infty^4 \cdot \tilde{C} \leq \frac{2}{3} \cdot \frac{2^4}{10^4} = \frac{32}{30000} < \frac{33}{30 \cdot 1000} = \frac{1.1}{1000}.$$

Aufgabe 2:

a) Beschreiben Sie die folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ mit Worten und geben Sie diese mit Hilfe von Polar– bzw. Zylinder– bzw. Kugelkoordinaten wieder.

$$M_1 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \; : \; x^2 + y^2 \leq 4 \right\},$$

$$M_2 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \; : \; x^2 + y^2 \leq 4, \, y \geq 0 \right\},$$

$$M_3 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \; : \; x^2 + y^2 \leq 4, \, x \geq 0 \right\},$$

$$M_4 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \; x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 5 \right\},$$

$$M_5 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \; x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \right\},$$

$$M_6 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \; x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, \, y \geq 0 \right\},$$

$$M_7 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \; x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, \, z \geq 0 \right\}.$$

b) Beschreiben Sie die Ränder der Mengen aus a) mit Hilfe von Polar–, bzw. Zylinder– bzw. Kugelkoordinaten.

Lösung 2:

a)

$$M_1 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \; : x = r\cos(\phi), \, y = r\sin(\phi); r \in [0, 2], \, \phi \in [0, 2\pi) \right\},$$

Kreisscheibe mit Radius 2 um 0,

$$M_2 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \; : x = r\cos(\phi), \, y = r\sin(\phi); r \in [0, 2], \, \phi \in [0, \pi) \right\},$$

obere Hälfte der Kreisscheibe M_1,

$$M_3 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \; : x = r\cos(\phi), \, y = r\sin(\phi); r \in [0, 2], \, \phi \in [-\frac{\pi}{2}, , \frac{\pi}{2}] \right\},$$

rechte Hälfte der Kreisscheibe M_1,

$$M_4 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : x = r\cos(\phi),\ y = r\sin(\phi); r \in [0,2],\ \phi \in [0, 2\pi),\ z \in [0,5] \right\},$$

Zylinder mit Radius 2, Rotationsachse= z-Achse,

Boden auf der x-y-Ebene und Höhe 5,

$$M_5 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : x = r\cos(\phi)\cos(\theta), y = r\sin(\phi)\cos(\theta), z = r\sin(\theta), \right.$$

$$\left. r \in [0,2],\ \phi \in [0, 2\pi), \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \right\},$$

Kugel mit Radius 2 um Null,

$$M_6 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : x = r\cos(\phi)\cos(\theta), y = r\sin(\phi)\cos(\theta), z = r\sin(\theta), \right.$$

$$\left. r \in [0,2],\ \phi \in [0, \pi), \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \right\},$$

(Hintere) Hälfte der Kugel mit Radius 2 um Null und $y \geq 0$,

$$M_7 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : x = r\cos(\phi)\cos(\theta), y = r\sin(\phi)\cos(\theta), z = r\sin(\theta), \right.$$

$$\left. r \in [0,2],\ \phi \in [0, 2\pi), \theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \right\},$$

Obere Hälfte der Kugel mit Radius 2 um Null.

b)

$$\partial M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ : x = 2\cos(\phi),\ y = 2\sin(\phi);\ \phi \in [0, 2\pi) \right\},$$

$$\partial M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ : x = 2\cos(\phi),\ y = 2\sin(\phi);\ \phi \in [0, \pi) \right\} \cup, \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ : x \in [-2, 2] \right\}$$

$$\partial M_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ : x = 2\cos(\phi),\ y = 2\sin(\phi); \phi \in [-\frac{\pi}{2}, , \frac{\pi}{2}] \right\} \cup, \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ : y \in [-2, 2] \right\}$$

$$\partial M_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : x = 2\cos(\phi),\ y = 2\sin(\phi);\ \phi \in [0, 2\pi),\ z \in [0, 5] \right\}$$

$$\cup \left\{ (x, y, 0)^T \in \mathbb{R}^3 \ : x = r\cos(\phi),\ y = r\sin(\phi); r \in [0, 2],\ \phi \in [0, 2\pi) \right\}$$

$$\cup \left\{ (x, y, 5)^T \in \mathbb{R}^3 \ : x = r\cos(\phi),\ y = r\sin(\phi); r \in [0, 2],\ \phi \in [0, 2\pi) \right\}.$$

$$\partial M_5 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : x = 2\cos(\phi)\cos(\theta), y = 2\sin(\phi)\cos(\theta), z = 2\sin(\theta), \right.$$

$$\left. \phi \in [0, 2\pi), \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \right\},$$

$$\partial M_6 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x = 2\cos(\phi)\cos(\theta), y = 2\sin(\phi)\cos(\theta), z = 2\sin(\theta), \phi \in [0, \pi), \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \right\}$$

$$\cup \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : x = r\cos(\theta), z = r\sin(\theta), r \in [0, 2],\ \theta \in [0, 2\pi] \right\},$$

$$\partial M_7 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x = 2\cos(\phi)\cos(\theta), y = 2\sin(\phi)\cos(\theta), z = 2\sin(\theta), \phi \in [0, 2\pi), \theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \right\}$$

$$\cup \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : x = r\cos(\phi), y = r\sin(\phi), r \in [0, 2],\ \phi \in [0, 2\pi] \right\}.$$

Bearbeitung: 18.–22.11.24