

Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften Blatt 3, Hausaufgaben

Aufgabe 1: (6+4 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f(x, y, z) = 2 + xz + y^2 + e^x y^2 \cos(z).$$

- a) Berechnen Sie das Taylor-Polynom zweiten Grades von f mit dem Entwicklungspunkt $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)^T := (0, 1, \pi)^T$.
- b) Zeigen Sie, dass für den Betrag des Restglieds $R_2(x, y, z) = f(x, y, z) - T_2(x, y, z)$ folgende Abschätzung gilt:

$$|R_2(x, y, z)| \leq 0.02 \quad \forall \mathbf{x} = (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_\infty \leq 0.1.$$

Lösung:

a)

$$f(x, y, z) = 2 + xz + y^2 + e^x y^2 \cos(z), \quad f(0, 1, \pi) = 2 + 1 + \cos(\pi) = 2.$$

$f_x = z + e^x y^2 \cos(z),$	$f_x(0, 1, \pi) = \pi - 1$
$f_y = 2y + 2ye^x \cos(z),$	$f_y(0, 1, \pi) = 2 - 2 = 0$
$f_z = x - e^x y^2 \sin(z),$	$f_z(0, 1, \pi) = 0 - 0 = 0$
$f_{xx} = e^x y^2 \cos(z),$	$f_{xx}(0, 1, \pi) = -1$
$f_{xy} = 2e^x y \cos(z),$	$f_{xy}(0, 1, \pi) = -2$
$f_{xz} = 1 - e^x y^2 \sin(z),$	$f_{xz}(0, 1, \pi) = 1$
$f_{yy} = 2 + 2e^x \cos(z),$	$f_{yy}(0, 1, \pi) = 2 - 2 = 0$
$f_{yz} = -2ye^x \sin(z),$	$f_{yz}(0, 1, \pi) = 0$
$f_{zz} = -e^x y^2 \cos(z),$	$f_{zz}(0, 1, \pi) = 1$

$$\begin{aligned}
T_2(x, y, z) &= f(0, 1, \pi) + \mathbf{grad} f(0, 1, \pi)^T \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} \\
&+ \frac{1}{2} (x - x_0, y - y_0, z - z_0) Hf(0, 1, \pi) \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} \\
&= f(0, 1, \pi) + f_x(0, 1, \pi)(x - 0) + f_y(0, 1, \pi)(y - 1) + f_z(0, 1, \pi)(z - \pi) \\
&+ \frac{1}{2} (x, y - 1, z - \pi) \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - 0 \\ y - 1 \\ z - \pi \end{pmatrix} \\
&= 2 + \pi x - x - \frac{x^2}{2} - 2x(y - 1) + x(z - \pi) + \frac{(z - \pi)^2}{2}.
\end{aligned}$$

Alternative Notation:

$$\begin{aligned}
T_2(x, y, z) &= f(0, 1, \pi) + f_x(0, 1, \pi)(x - x_0) + f_y(0, 1, \pi)(y - y_0) + f_z(0, 1, \pi)(z - z_0) \\
&+ \frac{1}{2!} \left(f_{xx}(0, 1, \pi)(x - 0)^2 + 2f_{xy}(0, 1, \pi)(x - 0)(y - 1) \right. \\
&+ 2f_{xz}(0, 1, \pi)(x - 0)(z - \pi) + f_{yy}(0, 1, \pi)(y - 1)^2 \\
&+ 2f_{yz}(0, 1, \pi)(y - 1)(z - \pi) + f_{zz}(0, 1, \pi)(z - \pi)^2 \left. \right) \\
&= 2 + \pi x - x - \frac{x^2}{2} - 2x(y - 1) + x(z - \pi) + \frac{(z - \pi)^2}{2}.
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{array}{ll}
f_{xxx} = e^x y^2 \cos(z), & |f_{xxx}| \leq 1.1^2 \cdot e^{0.1} \\
f_{xxy} = 2y e^x \cos(z), & |f_{xxy}| \leq 2.2 \cdot e^{0.1} \\
f_{xxz} = -e^x y^2 \sin(z), & |f_{xxz}| \leq 1.1^2 \cdot e^{0.1} \\
f_{xyy} = 2e^x \cos(z), & |f_{xyy}| \leq 2e^{0.1} \\
f_{xyz} = -2e^x y \sin(z), & |f_{xyz}| \leq 2.2 \cdot e^{0.1} \\
f_{xzz} = -e^x y^2 \cos(z), & |f_{xzz}| \leq 1.1^2 \cdot e^{0.1} \\
f_{yyy} = 0, & \\
f_{yyz} = -2e^x \sin(z), & |f_{yyz}| \leq 2e^{0.1} \\
f_{zzy} = -2e^x y \cos(z), & |f_{zzy}| \leq 2.2 \cdot e^{0.1} \\
f_{zzz} = e^x y^2 \sin(z), & |f_{zzz}| \leq 1.1^2 \cdot e^{0.1}
\end{array}$$

Eine gemeinsame obere Schranke für die Beträge der dritten Ableitungen ist zum Beispiel

$$C := 4.4 = 2.2 \cdot 4^{0.5} > 2.2 \cdot e^{0.5} > 2.2 \cdot e^{0.1}.$$

Als Schranke für den Fehler erhält man

$$|R_2(x, y, z)| \leq \frac{3^3}{3!} \cdot C \cdot \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_\infty^3 \leq \frac{9}{2} \cdot 4.4 \cdot 0.1^3 = \frac{9 \cdot 2.2}{1000} = \frac{19.8}{1000} < 0.02.$$

Aufgabe 2:

Hinweis: Zur Lösung dieser Aufgabe brauchen Sie keine einzige Ableitung genau auszurechnen!

Berechnen Sie das Taylor-Polynom zweiten Grades T_2 zur Funktion

$$f(x, y) = xy + \cos(x)e^y + \sin\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

mit dem Entwicklungspunkt $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und zeigen Sie, dass für alle

$$(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad |x| \leq 0.15, |y| \leq 0.2$$

die folgende Abschätzung gilt

$$|R_2(x, y; \mathbf{x}_0)| := |f(x, y) - T_2(x, y; \mathbf{x}_0)| \leq 0.05.$$

.

Lösung 2:

Der polynomiale Term xy wird exakt wiedergegeben.

Unter Verwendung der Potenzreihen von \cos , \sin , \exp erhalten wir

$$\begin{aligned} \cos(x)e^y &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \mp \dots\right) \left(1 + \frac{y^1}{1!} + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} \mp \dots\right) \\ &= 1 + \frac{y^1}{1!} + \frac{y^2}{2!} - \frac{x^2}{2!} + \text{Terme mit Potenz} \geq 3 \end{aligned}$$

und

$$\sin\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{\frac{x+y}{2}}{1!} - \frac{\left(\frac{x+y}{2}\right)^3}{3!} \pm \text{Terme mit Potenz} > 3.$$

Damit erhalten wir

$$T_2(x, y) = xy + 1 + y + \frac{y^2}{2!} - \frac{x^2}{2} + \frac{x+y}{2} = 1 + xy + \frac{x}{2} + \frac{3y}{2} - \frac{x^2}{2!} + \frac{y^2}{2}. \quad [4 \text{ Punkte}]$$

Für die Fehlerabschätzung benötigen wir eine obere Schranke für die Beträge der dritten Ableitungen von f . Diese sind alle von der Form

$(\pm \sin(x) \text{ bzw. } \pm \cos(x)) \cdot e^y - \frac{1}{2^3} \cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$. Damit folgt (ohne Taschenrechner)

$$|\text{dritte Ableitungen}| \leq e^{0.2} + \frac{1}{2^3} < e^{0.5} + \frac{1}{8} < \sqrt{4} + \frac{1}{8} < 2.4 \quad \forall x \in \mathbb{R}, |y| \leq 0.2. \quad [2 \text{ Punkte}]$$

und

$$|R_2(x, y; \mathbf{x}_0)| \leq \frac{2^3}{3!} (0.2)^3 \cdot \frac{24}{10} = \frac{4 \cdot 8 \cdot 8}{10000} = \frac{256}{10000} < \frac{3}{100}. \quad [1 \text{ Punkt}]$$

Abgabe: 18.–22.11.24