Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2024/25**
Prof. Dr. I. Gasser
Dr. H. P. Kiani

Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 2, Präsenzaufgaben

Aufgabe 1:

a) Beweisen Sie die folgende Bemerkung aus Seite 24 des Skripts

Bemerkung: Ist $\Phi : D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}^3$ eine $\mathcal{C}^2$-Funktion, so folgt $\mathbf{rot}(\nabla\Phi) = \mathbf{0}$.

Dass heißt: Gradientenfelder sind stets rotationsfrei.

b) Welche der folgenden Vektorfelder $\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{f}$: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$\boldsymbol{g}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x^2+2z\\y^2x+z\\2x+y\end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{f}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2xz\\-2yz\\x^2-y^2\end{pmatrix}$$

kann/können kein Gradientfeld einer $\mathcal{C}^2$-Funktion $\Phi, : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sein?

Lösung 1:

a) Für $\phi : \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \to \mathbb{R}$ rechnen wir

$$\mathbf{rot}(\nabla\Phi) = \mathbf{rot}\,(\nabla\Phi) = \mathbf{rot}\begin{pmatrix}\frac{\partial\Phi}{\partial x}\\\frac{\partial\Phi}{\partial y}\\\frac{\partial\Phi}{\partial z}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\Phi_z}{\partial y} - \frac{\partial\Phi_y}{\partial z}\\\frac{\partial\Phi_x}{\partial z} - \frac{\partial\Phi_z}{\partial x}\\\frac{\partial\Phi_y}{\partial x} - \frac{\partial\Phi_x}{\partial y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\Phi_{zy}-\Phi_{yz}\\\Phi_{xz}-\Phi_{zx}\\\Phi_{yx}-\Phi_{xy}\end{pmatrix}.$$

Die Behauptung folgt mit dem Vertauschbarkeitssatz von Schwarz.

b)

$$(\mathbf{rot}\ \boldsymbol{g})(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix}\frac{\partial g_3}{\partial y} - \frac{\partial g_2}{\partial z}\\\frac{\partial g_1}{\partial z} - \frac{\partial g_3}{\partial x}\\\frac{\partial g_2}{\partial x} - \frac{\partial g_1}{\partial y}\end{pmatrix}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix}1-1\\2-2\\y^2\end{pmatrix} \not\equiv \mathbf{0}.$$

$\boldsymbol{g}$ ist kein Gradientenfeld.

$$(\mathbf{rot}\ \boldsymbol{f})(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix}\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\\\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}\\\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\end{pmatrix}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix}-2y-(-2y)\\2x-2x\\0-0\end{pmatrix} \equiv \mathbf{0}.$$

$\boldsymbol{f}$ könnte ein Gradientenfeld sein.

Ergänzung für Gruppenleiter:innen:

Später in der Vorlesung wird gezeigt, dass in einfach zusammenhängenden Gebieten aus $\boldsymbol{rot}\ \boldsymbol{f} \equiv 0$ *bereits folgt, dass* $\boldsymbol{f}$ *ein Gradientenfeld ist.*

Hier gilt $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{grad}\,\Phi$ *mit* $\Phi(x,y,z) = (x^2 - y^2)z + k$. *Die Konstruktionsmethode wird ebenfalls später in der Vorlesung erklärt. Ist also an dieser Stelle nicht von den Studierenden verlangt!*

$$\begin{aligned}
&\Phi_x = 2xz \Longleftrightarrow \Phi(x,y,z) = x^2 z + C(y,z) \\
&\Phi_y = C_y(y,z) = -2yz \Longleftrightarrow C(y,z) = -y^2 z + d(z) \\
&\quad \Longleftarrow \Phi(x,y,z) = (x^2 - y^2)z + d(z) \\
&\Phi_z = x^2 - y^2 + d'(z) = x^2 - y^2 \Longleftrightarrow d(z) = k \Longleftarrow \Phi(x,y,z) = (x^2 - y^2)z + k\,.
\end{aligned}$$

Aufgabe 2:

Gegeben sind die Abbildungen $f,\, g:\, \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$f(x,y) := 3x - 5y, \qquad\qquad g(x,y) := \frac{1}{5}(x^2+y^2) + 1\,.$$

a) Berechnen Sie die Gradienten von f und g.

b) Zeichnen Sie für f die Höhenlinien $f^{-1}(C) := \{(x,y)^{\mathrm{T}} : f(x,y) = C\}$ zu den Funktionswerten $C_1 = 5$, $C_2 = 0$ und $C_3 = -10$.
Heften Sie in den Punkten $P_1 = \binom{0}{-1}$, $P_2 = \binom{5}{3}$ und $P_3 = \binom{-5}{-1}$ jeweils die Richtung des Gradienten an.

c) Zeichnen Sie für g die Höhenlinien $g^{-1}(C) := \{(x,y)^{\mathrm{T}} : g(x,y) = C\}$ zu den Funktionswerten $C_4 = \frac{6}{5}$, $C_5 = \frac{21}{5}$ und $C_6 = 6$.
Heften Sie in den Punkten $P_4 = \binom{0}{-1}$, $P_5 = \binom{4}{0}$ und $P_6 = \binom{3}{4}$ jeweils die Richtung des Gradienten an.

d) Wie hängt die Richtung des Gradienten in einem festen Punkt mit der Richtung der Höhenlinie durch diesen Punkt zusamme?

Lösung 2:

a) grad $f(x,y) = (3,-5)$.
grad $g(x,y) = \frac{1}{5}\,(2x,\,2y)$

b) Die Höhenlinien zu f sind die Geraden $y = \frac{3}{5}\,x - \frac{C}{5}$.

Die Höhenlinien zu den vorgegebenen Werten sind Geraden mit Steigung $\frac{3}{5}$ durch die vorgegebenen Punkte.

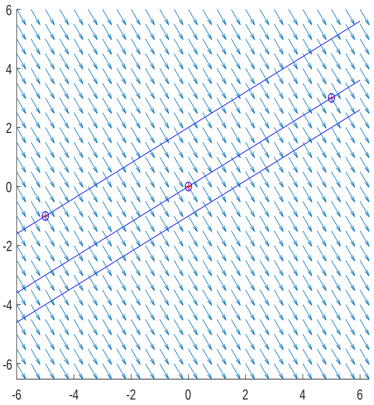
Die Gradienten haben alle die gleiche Richtung und stehen senkrecht auf den Höhenlinien.

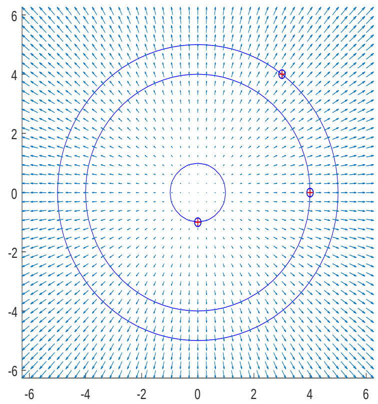
c) Die Höhenlinien zu g sind Kreise um den Nullpunkt.

Die Höhenlinien zu den vorgegebenen Werten sind wieder die Kreise um Null, die durch die vorgegebenen Punkte gehen. Also die Kreise mit Radius $1, 4, 5$.

Die Gradienten haben die gleiche Richtung wie die Ortsvektoren.

d) Der Gradient in einem festen Punkt steht senkrecht auf den Höhenlinie durch diesen Punkt. Vergleiche auch Vorlesung Seite 36.





Zusatzaufgabe, nur für die ganz schnellen Studierenden:

Gegeben sei das Vektorfeld

$$\boldsymbol{f}\,(x,y,z) = (x^2 + y + 4z,\ y^2 + 2z + 5x,\ z^2 + 3x + 6y\,)^{\mathrm{T}.}$$

Berechnen Sie die Ausdrücke

$$\mathbf{grad}(\operatorname{div} \boldsymbol{f}\,) \qquad \text{bzw.} \qquad \mathbf{rot}(\operatorname{div} \boldsymbol{f}\,)\,, \qquad \text{bzw.} \qquad \mathbf{rot}\,(\mathbf{rot}\ \ \boldsymbol{f}\,)$$

falls diese definiert sind. Einer der Ausdrücke verschwindet für die vorgegebene Funktion $\boldsymbol{f}$ identisch. Zeigen Sie mit Hilfe eines Gegenbeispiels, dass dieser Ausdruck nicht für beliebige $\boldsymbol{f}$ identisch verschwindet.

Lösung:

$\boldsymbol{f}\,(x,y,z) = (x^2 + y + 4z,\ y^2 + 2z + 5x,\ z^2 + 3x + 6y\,)^{\mathrm{T}}.$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{f} \ = \ 2x + 2y + 2z, \quad \mathbf{grad}(\operatorname{div} \boldsymbol{f}) \ = (2,2,2)\,,$$

$$\mathbf{rot}\ \boldsymbol{f} \ = \begin{pmatrix} (f_3)_y - (f_2)_z \\ (f_1)_z - (f_3)_x \\ (f_2)_x - (f_1)_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-2 \\ 4-3 \\ 5-1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{rot}\,(\mathbf{rot}\ \boldsymbol{f}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{rot}(\operatorname{div} \boldsymbol{f}\,)$ ist nicht definiert.

Hier verschwindet zwar $\mathbf{rot}(\mathbf{rot}\ \ \boldsymbol{f}\,)$. Wie das folgende Beispiel zeigt, gilt das allerdings nicht für beliebige f.

$$\tilde{f}(x,y,z) := \begin{pmatrix} y^3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \mathbf{rot}\ \tilde{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3y^2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \mathbf{rot}\ \left(\mathbf{rot}\ \tilde{f}(x,y,z)\right) = \begin{pmatrix} -6y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$