Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2024/25**
Prof. Dr. I. Gasser
Dr. H. P. Kiani

Analysis III
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 2, Hausaufgaben

Aufgabe 1: (2+2+2+4 Punkte)

Berechnen Sie die Jacobi–Matrizen folgender Funktionen und deren Determinanten.

Überall wo die Determinante der Jacobi–Matrix nicht verschwindet, ist die jeweilige Funktion umkehrbar. Für welche Werte der Variablen verschwinden die Determinanten der Jacobi-Matrizen der gegebenen Funktionen?

$$\boldsymbol{f}^{[1]} : \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ xy \end{pmatrix} \end{cases} \qquad \boldsymbol{f}^{[2]} : \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u - 2v \\ u \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{f}^{[3]} = \boldsymbol{f}^{[2]} \circ \boldsymbol{f}^{[1]}$$

$$\boldsymbol{f}^{[4]} : \begin{cases} \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^3, \quad a, b, c \in \mathbb{R}^+ \\ \begin{pmatrix} r \\ \phi \\ \theta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a \cdot r \cdot \cos\phi \cos\theta \\ b \cdot r \cdot \sin\phi \cos\theta \\ c \cdot r \cdot \sin\theta \end{pmatrix} \end{cases}$$

Tipp zu $\boldsymbol{f}^{[4]}$: Für die Transformation von Kugelkoordinaten auf kartesischen Koordinaten

$$\boldsymbol{g} : \mathbb{R} \times [0, 2\pi] \times [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^3, \qquad \boldsymbol{g} \begin{pmatrix} r \\ \phi \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\phi)\cos(\theta) \\ r\sin(\phi)\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \end{pmatrix}$$

gilt nach Vorlesung

$$\det(\boldsymbol{J}\,\boldsymbol{g}(r, \phi, \theta)) = r^2 \cos(\theta).$$

Lösung 1:

$$\boldsymbol{f}^{[1]}(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ xy \end{pmatrix}$$

$$J\boldsymbol{f}^{[1]} = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ y & x \end{pmatrix} \qquad \det J\boldsymbol{f}^{[1]}(x, y) = 2(x^2 - y^2).$$

Die Determinante verschwindet für $y = \pm x$.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{f}^{[2]}(u,v) &= \begin{pmatrix} u-2v \\ u \end{pmatrix} \\
J\boldsymbol{f}^{[2]}(u,v) &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \det\, J\boldsymbol{f}^{[2]}(u,v) = 2.
\end{aligned}$$

Die Determinante verschwindet nie.

$$\boldsymbol{f}^{[3]} = \boldsymbol{f}^{[2]} \circ \boldsymbol{f}^{[1]}$$

$$J\,\boldsymbol{f}^{[3]}(x,y) = J\,\boldsymbol{f}^{[2]} \cdot Jf_1(x,y) = \begin{pmatrix} 2x-2y & 2y-2x \\ 2x & 2y \end{pmatrix}$$

$$\det\, J\,\boldsymbol{f}^{[3]}(x,y) = \det\, J\,\boldsymbol{f}^{[2]} \cdot \det\, J\,\boldsymbol{f}^{[1]}(x,y) = 0 \Longrightarrow$$
$$\det\, J\,\boldsymbol{f}^{[2]} = 0 \vee \det\, J\,\boldsymbol{f}^{[1]}(x,y) = 0 \Longleftrightarrow |x| = |y|$$

$$\boldsymbol{f}^{[4]}(r,\phi,\theta) = \begin{pmatrix} a\cdot r\cdot\cos\phi\cos\theta \\ b\cdot r\cdot\sin\phi\cos\theta \\ c\cdot r\cdot\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$J\,\boldsymbol{f}^{[4]}\,(r,\phi,\theta) = \begin{pmatrix} a\cos\phi\cos\theta & -ar\sin\phi\cos\theta & -ar\,\cos\,\phi\sin\theta \\ b\sin\phi\cos\theta & br\cos\phi\cos\theta & -br\,\sin\,\phi\sin\theta \\ c\sin\theta & 0 & cr\cos\theta \end{pmatrix}$$

Direkte Berechnung der Determinante:

$$\begin{aligned}
\det\, J\boldsymbol{f}^{[4]} &= a\cdot b\cdot c\left(\sin\theta\begin{vmatrix} -r\sin\phi\cos\theta & -r\,\cos\,\phi\sin\theta \\ r\cos\phi\cos\theta & -r\,\sin\,\phi\sin\theta \end{vmatrix} + r\cos\theta\begin{vmatrix} \cos\phi\cos\theta & -r\sin\phi\cos\theta \\ \sin\phi\cos\theta & r\cos\phi\cos\theta \end{vmatrix}\right) \\
&= a\cdot b\cdot c\cdot\sin\theta\,\left(r^2\,\sin\theta\,\cos\theta(\cos^2\phi+\sin^2\phi)\right) \\
&+ a\cdot b\cdot c\cdot r\cos\theta\,\left(r\cos^2\theta(\cos^2\phi+\sin^2\phi)\right) \\
&= a\cdot b\cdot c\cdot r^2\cos\theta\,(\cos^2\theta+\sin^2\theta) = a\cdot b\cdot c\cdot r^2\cos\theta\,,
\end{aligned}$$

Alternativ: Unter Verwendung des Ergebnisses aus der Vorlesung und der Kettenregel erhält man mit wesentlich weniger Arbeit

$\boldsymbol{f}^{[4]} = \boldsymbol{h}\circ\boldsymbol{g}$ mit $\boldsymbol{h}\,(x,y,z) = (ax,by,cz)^T$ und damit

$\boldsymbol{J}\ \boldsymbol{f}^{[4]} = \boldsymbol{J}\ \boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{J}\ \boldsymbol{g}$ und $\det(\boldsymbol{J}\ \boldsymbol{f}^{[4]}) = \det(\boldsymbol{J}\ \boldsymbol{h})\cdot\det(\boldsymbol{J}\ \boldsymbol{g})$

Offensichtlich gilt

$$\boldsymbol{J}\ \boldsymbol{h} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \det(\boldsymbol{J}\ \boldsymbol{h}) = abc.$$

$\det(\boldsymbol{J}\ \boldsymbol{f}^{[4]})(r,\phi,\theta) = abc\cdot r^2\cos(\theta)\,.$

Die Determinante verschwindet nur für $r = 0 \notin \mathbb{R}^+$ oder $\theta = \pm\frac{\pi}{2}\,.$

Aufgabe 2: (3+3+4 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $f(\boldsymbol{x}) := -x^2 - y^2 + 2x + z$.

a) Geben Sie eine Gleichung für die Niveaufläche $N_{\boldsymbol{x}^0}$ der Funktion f im Punkt $\boldsymbol{x}^0 = (1,2,3)^{\mathrm{T}}$ an, und berechnen Sie den Gradienten von f in $\boldsymbol{x}^0$.

b) Berechnen Sie die Richtungsableitungen $D_{\boldsymbol{w}^{[j]}} f(\boldsymbol{x}^0)$ für $j = 1,2,3$,

$\boldsymbol{v}^{[1]} = (1,1,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{v}^{[2]} = (1,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{v}^{[3]} = (1,0,0)^{\mathrm{T}}$

und $\boldsymbol{w}^{[j]} := \frac{\boldsymbol{v}^{[j]}}{\|\boldsymbol{v}^{[j]}\|}$. Können Sie für $j = 1,2,3$ entscheiden, ob es sich bei $\boldsymbol{w}^{[j]}$ um eine Aufstiegs- oder Abstiegsrichtung handelt?

c) Berechnen Sie die Richtungsableitung $D_{\tilde{\boldsymbol{v}}} f(\boldsymbol{x}^0)$ für $\tilde{\boldsymbol{v}} = 1/\sqrt{17}(0,-4,1)^{\mathrm{T}}$. Handelt es sich um eine Aufstiegs- oder Abstiegsrichtung?
Berechnen Sie den Funktionswert im Punkt $\boldsymbol{x}^0 + 2\sqrt{17}\,\tilde{\boldsymbol{v}}$.
Ergibt sich da nicht ein Widerspruch?
Berechnen Sie nun den Funktionswert im Punkt $\boldsymbol{x}^0 + \frac{\sqrt{17}}{2}\tilde{\boldsymbol{v}}$.
Erklären Sie Ihre Ergebnisse.

Lösung 2:

a) Auf der gesuchten Niveaufläche gilt

$$-x^2 - y^2 + 2x + z = -1^2 - 2^2 + 2 + 3 = 0\,.$$

$$\nabla f(x,y,z) = (-2x+2, -2y, 1)^T$$
$$\nabla f(1,2,3) = (0,-4,1)^T$$

b) $D_{\boldsymbol{w}^{[1]}} f(\boldsymbol{x}^0) = \nabla f(\boldsymbol{x}^0)^T \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{v}^{[1]} = \frac{1}{\sqrt{3}}(0-4+1) < 0$: Abstiegsrichtung.

$D_{\boldsymbol{w}^{[2]}} f(\boldsymbol{x}^0) = \nabla f(\boldsymbol{x}^0)^T \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{v}^{[2]} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0-4+0) < 0$: Abstiegsrichtung.

$D_{\boldsymbol{w}^{[3]}} f(\boldsymbol{x}^0) = \nabla f(\boldsymbol{x}^0)^T \cdot \boldsymbol{v}^{[3]} = 0+0+0 = 0$: Es kann eine Abstiegs- oder eine Aufstiegsrichtung vorliegen oder eine Richtung, in der die Funktion konstant bleibt.

Wir schauen etwas genauer hin:

$$f(\boldsymbol{x}^0 + \Delta x \cdot \boldsymbol{v}^{[3]}) - f(\boldsymbol{x}^0) = -(1+\Delta x)^2 - 2^2 + 2(1+\Delta x) + 3 = -\Delta x^2 < 0$$

Es geht also ebenfalls abwärts.

c)

$$D_{\tilde{\boldsymbol{v}}} f(\boldsymbol{x}^0) = \tilde{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla f(\boldsymbol{x}^0) = \frac{1}{\sqrt{17}} \nabla f(\boldsymbol{x}^0) \cdot \nabla f(\boldsymbol{x}^0) = \sqrt{17}$$

$\tilde{\boldsymbol{v}}$ ist eine Aufstiegsrichtung (sie ist sogar die Richtung des steilsten Anstiegs).

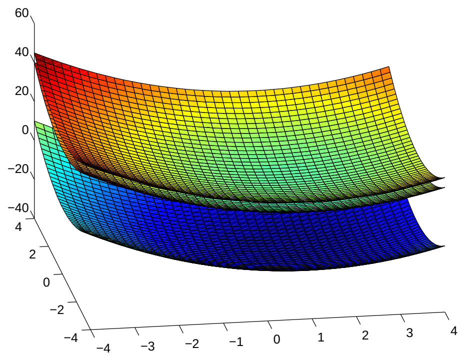
$f(\boldsymbol{x}^0 + 2\sqrt{17}\,\tilde{\boldsymbol{v}}) = f(1,-6,5) = -1 - 36 + 2 + 5 = -30\,.$

Offensichtlich ist dieser Funktionswert kleiner als $f(\boldsymbol{x}^0) = 0\,.$

$f(\boldsymbol{x}^0 + 0.5\sqrt{17}\,\tilde{\boldsymbol{v}}) = f(1,0,3.5) = 4.5 > f(\boldsymbol{x}^0) = 0\,.$

Des Rätsels Lösung: Aussagen über Anstieg, Abstieg etc. sind i.d.R. nur lokale Aussagen.

Das Bild zeigt die Niveauflächen der drei Punkte $\boldsymbol{x}^0 + 0.5\cdot\sqrt{17}\,\tilde{\boldsymbol{v}}$, $\boldsymbol{x}^0$, $\boldsymbol{x}^0 + 2\sqrt{17}\,\tilde{\boldsymbol{v}}$.



Abgabe: 04.–08.11.24