Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2024/25**
Prof. Dr. I. Gasser
Dr. H. P. Kiani

Analysis III
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 1, Präsenzaufgaben

Aufgabe 1:

Gegeben ist die Funktion

$$f\ :\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,, \qquad f(x,y)\ =\ \cos(2x-3y)\ +\ x^3\ -\ y^3\ +\ 2y^2\,.$$

a) Berechnen Sie alle partiellen Ableitungen erster, zweiter und dritter Ordnung von f.

b) Geben Sie $\operatorname{grad} f(x,y)$, $\nabla f(x,y)$ und $\Delta f(x,y)$ an.

Lösung:

a)

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= \cos(2x-3y)\ +\ x^3\ -\ y^3\ +\ 2y^2\,,\\
f_x(x,y) &= -2\sin(2x-3y)\ +\ 3x^2\,,\\
f_y(x,y) &= 3\sin(2x-3y)\ -3y^2\ +\ 4y\,,\\
f_{xx}(x,y) &= -4\cos(2x-3y)\ +\ 6x\,,\\
f_{xy}(x,y) &= f_{yx}(x,y)\ = 6\cos(2x-3y)\,,\\
f_{yy}(x,y) &= -9\cos(2x-3y)\ -6y\ +4\,,\\
f_{xxx}(x,y) &= 8\sin(2x-3y)\ +6\,,\\
f_{xxy}(x,y) &= f_{xyx}(x,y)\ =\ f_{yxx}(x,y)\ =\ -12\ \sin(2x-3y)\,,\\
f_{xyy}(x,y) &= f_{yxy}(x,y)\ =\ f_{yyx}(x,y)\ =\ 18\ \sin(2x-3y)\,,\\
f_{yyy}(x,y) &= -27\ \sin(2x-3y)-6\,.
\end{aligned}$$

b) $\operatorname{grad} f(x,y) = \left(-2\sin(2x-3y)\ +\ 3x^2,\ 3\sin(2x-3y)\ -3y^2\ +\ 4y\,\right)$,

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} -2\sin(2x-3y)\ +\ 3x^2 \\ 3\sin(2x-3y)\ -3y^2\ +\ 4y \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
\Delta f(x,y) &= -4\cos(2x-3y)\ +\ 6x\ -9\cos(2x-3y)\ -6y\ +4\\
&= -13\cos(2x-3y)\ +\ 6x\ -6y\ +4.
\end{aligned}$$

Aufgabe 2: Gegeben sind die Mengen

$$M_1 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \ : \ x, y \in \mathbb{R},\ x^2 + y^2 \leq 1 \right\},$$

$$M_2 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \ : \ x, y \in \mathbb{R},\ x^2 + y^2 < 4 \right\},$$

$$M_3 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \ : \ x, y \in \mathbb{R},\ 1 \leq x^2 + y^2 < 4 \right\},$$

$$M_4 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ : \ x, y, z \in \mathbb{R},\ x^2 + y^2 \leq 1 \right\},$$

$$M_5 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ : \ x, y, z \in \mathbb{R},\ x^2 + y^2 + z^2 < 1 \right\},$$

$$M_6 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x, y) \cdot (1, 2)^T = 1 \right\},$$

$$M_7 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ (x, y, z) \cdot (1, 2, 1)^T < 1 \right\},$$

$$M_8 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ : \ x, y, z \in \mathbb{R},\ z = x^2 + y^2 \right\}.$$

$$M_9 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \ : \ x, y \in \mathbb{R},\ (x+3)^2 + y^2 \leq 1 \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \ : \ x, y \in \mathbb{R},\ (x-3)^2 + y^2 \leq 1 \right\}.$$

a) Geben Sie die Randpunkte der Mengen $M_1, \ldots, M_9$ an.

b) Welche der Mengen $M_1, \ldots, M_9$ sind offen, welche sind abgeschlossen?

c) Welche der Mengen $M_1, \ldots, M_9$ sind beschränkt?

d) Welche der Mengen $M_1, \ldots, M_9$ sind zusammenhängend, welche sind konvex?

Lösung 2:

a)

$$\partial M_1 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;:\; x, y \in \mathbb{R},\; x^2 + y^2 = 1 \right\} \qquad \text{Kreisrand,}$$

$$\partial M_2 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;:\; x, y \in \mathbb{R},\; x^2 + y^2 = 4 \right\} \qquad \text{Kreisrand,}$$

$$\partial M_3 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;:\; x, y \in \mathbb{R},\; x^2 + y^2 \in \{1, 4\} \right\} \qquad \text{Ringrand,}$$

$$\partial M_4 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;:\; x, y, z \in \mathbb{R},\; x^2 + y^2 = 1 \right\} \qquad \text{Zylindermantel,}$$

$$\partial M_5 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;:\; x, y, z \in \mathbb{R},\; x^2 + y^2 + z^2 = 1 \right\} \qquad \text{Kugeloberfläche,}$$

$$\partial M_6 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;:\; (x, y) \cdot (1, 2)^T = 1 \right\} \qquad \text{Gerade,}$$

$$\partial M_7 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;:\; (x, y, z) \cdot (1, 2, 1)^T = 1 \right\} \qquad \text{Ebene,}$$

$$\partial M_8 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;:\; x, y, z \in \mathbb{R},\; z = x^2 + y^2 \right\} \qquad \text{Paraboloid,}$$

$$\begin{aligned} \partial M_9 := & \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;:\; x, y \in \mathbb{R},\; (x+3)^2 + y^2 = 1 \right\} \\ & \cup \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;:\; x, y \in \mathbb{R},\; (x-3)^2 + y^2 = 1 \right\} \qquad \text{Zwei Kreise.} \end{aligned}$$

b) M_1 : Abgeschlossene Kreisscheibe mit Radius 1 um Null.

M_2 : Offene Kreisscheibe mit Radius 2 um Null

.

M_3 : Ring mit Innenradius 1 und Außenradius 2 um Null. Weder offen noch abgeschlossen.

M_4 : Das Komplement ist offen. Abgeschlossener unendlich langer Zylinder.

M_5 : Offene Kugel mit Radius 1 um Null.

M_6 : Gerade im $\mathbb{R}^2$, abgeschlossen.

M_7 : Halbraum im $\mathbb{R}^3$ begrenzt durch eine Ebene, die nicht zur Menge gehört, also offen.

M_8 := Das Komplement ist offen. Fläche im $\mathbb{R}^3$, abgeschlossen,

M_9 : Zwei abgeschlossene Kreisscheiben mit Radius 1 um $(-3, 0)^T$ und $(3, 0)^T$. Abgeschlossen.

c) Die Mengen M_1, M_2, M_3, M_5 und M_9 sind Teilmengen geeigneter Kugeln um Null, also beschränkt.

Die Mengen M_4, M_6, M_7 und M_8 passen in keine Kugel um Null, sie sind nicht beschränkt.

d) Alle Mengen bis auf M_9 sind zusammenhängend: Je zwei Punkte der Menge können mit einer Kurve, die ganz in der Menge verläuft, verbunden werden. Für M_9 trifft dies nicht zu. Beispiel: $(-2, 0)^T$ und $(2, 0)^T$.

M_3 ist nicht konvex. Zum Beispiel die Verbindungsstrecke zwischen $(-1, 0)^T$ und $(1, 0)^T$ liegt nicht in M_3 .

M_8 ist nicht konvex. Zum Beispiel die Verbindungsstrecke zwischen $(-1, 0, 1)^T$ und $(1, 0, 1)^T$ liegt nicht in M_8 .

M_9 ist nicht zusammenhängend, also auch nicht konvex.

Alle anderen Mengen sind konvex.