Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2024/25**
Prof. Dr. I. Gasser, Dr. H. P. Kiani

Analysis III
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 1, Hausaufgaben

Aufgabe 1:

a) Berechnen Sie alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung für die Funktionen:
$$s(x,y,z) := xyz\,\sin(x+y+z), \qquad g(x,y,z) := \frac{\cos^2(x)e^y}{z}\,.$$

b) Berechnen Sie für die Funktion $f:\ \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$
$$f(x,y,z) = \arctan(x)e^y + \sin(x)\ln(1+y^2)z + x^2e^{z^2}$$
die Ableitung f_{xyz} sowie $\nabla f(x,y,z)$.

Lösungshinweise zur Aufgabe 1:

a)
$$\begin{aligned}
s(x,y,z) :=& xyz\,\sin(x+y+z),\\
s_x(x,y,z) =& yz\,\sin(x+y+z) + xyz\cos(x+y+z)\\
s_{xx}(x,y,z) =& 2yz\,\cos(x+y+z) - xyz\sin(x+y+z)\\
s_{xy}(x,y,z) =& (z - xyz)\,\sin(x+y+z) + (xz+yz)\,\cos(x+y+z)
\end{aligned}$$

Alle anderen Ableitungen ergeben sich sofort aus Symmetriegründen denn die Variablen x,y,z sind vertauschbar. Man erhält also zum Beispiel durch Vertauschen der Rollen von x und z:
$$s_{zy}(x,y,z) = s_{yz}(x,y,z) = (x - xyz)\,\sin(x+y+z) + (xz+yx)\,\cos(x+y+z)$$

Oder zur Berechnung von s_{yy} durch Vertauschen der Rollen von x und y in s_{xx}
$$s_{yy}(x,y,z) = 2xz\,\cos(x+y+z) - xyz\sin(x+y+z)$$

Zur Berechnung von s_{xz} tauscht man in s_{xy} die Rollen von y und z:
$$s_{xz}(x,y,z) = (y - xyz)\,\sin(x+y+z) + (xy+yz)\,\cos(x+y+z)$$

und so weiter.

Ein Ableiten von $g(x,y,z) = \dfrac{\cos^2(x)e^y}{z}$ nach y verändert die Funktion nicht. Daher gilt:

$$\begin{aligned}
g_x(x,y,z) =& \frac{-2\cos(x)\sin(x)e^y}{z}\\
g_y(x,y,z) =& g(x,y,z) = \frac{\cos^2(x)e^y}{z}\\
g_z(x,y,z) =& g_{zy}(x,y,z) = -\frac{\cos^2(x)e^y}{z^2}\,.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{xx}(x,y,z) =& \frac{\left(-2\cos^2(x)+2\sin^2(x)\right)e^y}{z}\,, & g_{xy}(x,y,z) =& g_x(x,y,z)\,,\\
g_{xz}(x,y,z) =& \frac{2\cos(x)\sin(x)e^y}{z^2}\,, & g_{yx}(x,y,z) =& g_x(x,y,z)\,,\\
g_{yy}(x,y,z) =& g(x,y,z)\,, & g_{yz}(x,y,z) =& g_z(x,y,z)\,,\\
g_{zx}(x,y,z) =& g_{xz}(x,y,z)\,, & g_{zy}(x,y,z) =& g_z(x,y,z)\,,\\
g_{zz}(x,y,z) =& \frac{2\cos^2(x)e^y}{z^3}
\end{aligned}$$

b) Zur Berechnung der dritten Ableitung f_{xyz} von

$$f(x,y,z) = \arctan(x)e^y + \sin(x)\ln(1+y^2)z + x^2e^{z^2}$$

macht es sinn zuerst nach y oder z abzuleiten. Zum Beispiel so:

$$\begin{aligned}
f_z(x,y,z) =&\ 0 + \sin(x)\ln(1+y^2) + 2zx^2e^{z^2}\\
f_{yz}(x,y,z) =&\ \sin(x)\frac{2y}{1+y^2} + 0\\
f_{xyz}(x,y,z) =&\ \frac{2y\cos(x)}{1+y^2}\,.
\end{aligned}$$

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} f_x(x,y,z)\\ f_y(x,y,z)\\ f_z(x,y,z)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{e^y}{1+x^2} + \cos(x)\ln(1+y^2)z + 2xe^{z^2})\\ \arctan(x)e^y + \sin(x)\frac{2yz}{1+y^2}\\ \sin(x)\ln(1+y^2) + 2zx^2e^{z^2}\end{pmatrix}\,.$$

Aufgabe 2: Die Funktion

$$u(x,t) := \frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{2\pi}{L}(x+ct)\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{L}(x-ct)\right)\right]$$

beschreibt näherungsweise die Auslenkung des Punktes $x \in [0, L]$ einer schwingenden Saite der Länge L zum Zeitpunkt $t \geq 0$ mit den Anfangsdaten
$u(x,0) = \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) =$ Auslenkung zum Zeitpunkt $t = 0$ und
$u_t(x,0) = 0 =$ Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$.

a) Berechnen Sie die Auslenkung in den Endpunkten der Saite, die sogenannten Randdaten $u(0,t)$ und $u(L,t)$.

b) Zeigen Sie, dass u die Wellengleichung $\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad$ erfüllt.

c) Versuchen Sie die Form der Saite für $t = 0, \frac{L}{6c}, \frac{L}{4c}, \frac{L}{3c}, \frac{L}{2c}, \frac{L}{c}$ zu skizzieren.
Hinweis: $\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2\sin(a)\cos(b)$.

Lösung zur Aufgabe 2:

a) $u(0,t) = u(L,t) = 0$.

b) Ableitungen ausrechnen und einsetzen!

$$\begin{aligned}
u_x(x,t) &= \frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{L}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{L}(x+ct)\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{L}(x-ct)\right)\right] \\
u_{xx}(x,t) &= \frac{\pi}{L}\cdot\frac{2\pi}{L}\left[-\sin\left(\frac{2\pi}{L}(x+ct)\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{L}(x-ct)\right)\right] \\
u_t(x,t) &= \frac{1}{2}\cdot\frac{2c\pi}{L}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{L}(x+ct)\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{L}(x-ct)\right)\right] \\
u_{tt}(x,t) &= \frac{c\pi}{L}\cdot\frac{2c\pi}{L}\left[-\sin\left(\frac{2\pi}{L}(x+ct)\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{L}(x-ct)\right)\right] = c^2 u_{xx}(x,t)
\end{aligned}$$

Bemerkung: In den Anwendungen ist die Situation genau umgekehrt: Gesucht wird eine Lösung der Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c^2\Delta(x), \qquad \forall\, x \in [0, L],\ t > 0$$

bei vorgegebenen Anfangswerten, hier

$$u(x,0) = \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right), \qquad \textit{und} \qquad u_t(x,0) = 0, \qquad \forall\, x \in [0, L]$$

und vorgegebenen Randbedingungen, hier

$$u(0,t) = u(L,t) = 0, \qquad \forall t > 0.$$

c) Mit Hilfe des Hinweises: $\sin(a+b)+\sin(a-b) = 2\sin(a)\cos(b)$ erhalten wir

$$u(x,t) := \frac{1}{2}\left[\sin\left(\tfrac{2\pi}{L}(x+ct)\right) + \sin\left(\tfrac{2\pi}{L}(x-ct)\right)\right] = \sin\left(\tfrac{2x\pi}{L}\right)\cdot\cos\left(\tfrac{2c\pi t}{L}\right)$$

$$u(x,0) = \sin\left(\tfrac{2\pi}{L}x\right)\cos(0) = \sin\left(\tfrac{2\pi}{L}x\right).$$

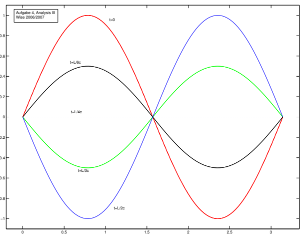
$$u(x,\tfrac{L}{6c}) = \sin\left(\tfrac{2x\pi}{L}\right)\cdot\cos\left(\tfrac{2c\pi L}{6cL}\right) = \sin\left(\tfrac{2\pi x}{L}\right)\cdot\cos(\tfrac{\pi}{3}) = \tfrac{1}{2}\,u(x,0)$$

Analog rechnet man

$$u(x,\tfrac{L}{4c}) = \sin\left(\tfrac{2\pi x}{L}\right)\cdot\cos(\tfrac{2\pi}{L}\cdot c\cdot\tfrac{L}{4c}) = \sin\left(\tfrac{2\pi x}{L}\right)\cdot\cos(\tfrac{\pi}{2}) = 0$$

$$u(x,\tfrac{L}{3c}) = \sin\left(\tfrac{2\pi x}{L}\right)\cdot\cos(\tfrac{2\pi}{3}) = -\tfrac{1}{2}u(x,0)$$

$$u(x,\tfrac{L}{2c}) = \sin\left(\tfrac{2\pi x}{L}\right)\cdot\cos(\pi) = -u(x,0)$$



$$u(x,\tfrac{L}{c}) = \sin\left(\tfrac{2\pi x}{L}\right)\cdot\cos(2\pi) = u(x,0).$$