Analysis III
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 7, Präsenzaufgaben

Aufgabe 1:

a) Sei $\boldsymbol{f}$ das Vektorfeld $\boldsymbol{f}(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c}_1$ die Kurve mit der Parametrisierung

$$\mathbf{c}_1(t) = (t, \sin(t)) \qquad t \in [0, \pi]$$

und c_2 der mathematisch positiv orientierte Rand des Rechtecks

$$R = \{(x,y) \;:\; x \in [0,1],\; y \in [0,2]\} \;=\; [0,1] \;\times\; [0,2] \cdot$$

(i) Besitzt f ein Potential?

(ii) Berechnen Sie für $i = 1, 2$ die Kurvenintegrale

$$\int_{\mathbf{c}_i} \boldsymbol{f}(x,y)\, d(x,y) \cdot$$

(iii) Berechnen Sie den Fluss von $\boldsymbol{f}$ aus R heraus.

b) Sei $\tilde{\boldsymbol{f}}$ das Vektorfeld $\tilde{\boldsymbol{f}}(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 - y^3 \\ y^2 + x^3 \end{pmatrix}$. $\mathbf{c}_2$ sei wie oben definiert und

$$\mathbf{c}_3(t) = (1, t^2) \qquad t \in [0,3]$$

Berechnen Sie die Kurvenintegrale

$$\int_{\mathbf{c}_2} \tilde{\boldsymbol{f}}(x,y)\, d(x,y)\,, \qquad \int_{\mathbf{c}_3} \tilde{\boldsymbol{f}}(x,y)\, d(x,y) \cdot$$

Aufgabe 2)

Gegeben sei

$$K := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;:\; 0 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 16,\; y \geq 0 \right\},$$

und das Vektorfeld

$$\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\; \boldsymbol{f}(x,y,z) \;=\; \begin{pmatrix} x + y^2 \\ 2y \\ 3z + x^2 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie $\displaystyle\int_K \operatorname{div} \boldsymbol{f}(x,y,z)\, d(x,y,z)\,.$

b) K ist berandet durch ein ebenes Flächenstück W und ein gewölbtes Flächenstück M. Geben Sie eine Parametrisierung von W an.

c) Berechnen Sie den Fluss von $\boldsymbol{f}$ durch W, also

$$\int_W \boldsymbol{f} \cdot dO\,.$$

d) Wie groß ist nach a) und c) der Fluss durch den gewölbten Teil des Randes von K, also

$$\int_M \boldsymbol{f} \cdot dO\,?$$

Bearbeitungstermine: 27.01–31.01.25