

Analysis III
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 6, Präsenzaufgaben

Aufgabe 1:

- a) Gegeben sind der wie folgt beschriebene Körper $K \subset \mathbb{R}^3$ und das Vektorfeld \mathbf{f} :

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x \in [1, 3], 1 - x \leq y \leq 2 + x, x^2 + y^2 - 1 \leq z \leq x^2 + y^2 + 1 \right\},$$

$$\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} yz + y \\ x(z + 1) + y \\ y(z + 2) + x \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie

$$\int_K \operatorname{div}(\mathbf{f}(x, y, z)) \, d(x, y, z).$$

- b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_D (1 - x^2) \, d(x, y)$$

über dem Kreisring $D := \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2; 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$.

Hinweis: $\cos^2 \phi = \frac{1}{2} (\cos(2\phi) + 1)$.

Aufgabe 2:

Gegeben sei der Kegel $K \subset \mathbb{R}^3$, $K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 4 - 4\sqrt{x^2 + y^2} \right\}$.

Der Kegel habe die Konstante Dichte $\rho = 2$.

- a) Berechnen Sie die Masse des Kegels.
b) Berechnen Sie das Trägheitsmoment des Kegels bezüglich der z -Achse mittels Integration.

Bearbeitungstermine: 13.01–17.01.25