

Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften Blatt 6, Hausaufgaben

Aufgabe 1:

a) Gegeben sei die Menge

$$D := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \frac{y^2}{2} - 2 \leq x \leq 4 - y^2 \right\}$$

Skizzieren Sie die Menge D und bestimmen Sie den Schwerpunkt von D bei homogener Massendichte (Masse/Flächeneinheit) $\rho = 2$.

Hinweis: Es gilt

Masse: $M = \int_D \rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$

Schwerpunkt: $X_s = \frac{1}{M} \int_D \rho(\mathbf{x}) \mathbf{x} d\mathbf{x}$ (komponentenweise)

b) Sei $K := \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0\}$. Berechnen Sie

$$\int_K (y^2 - x^2) d(x, y, z)$$

Hinweise:

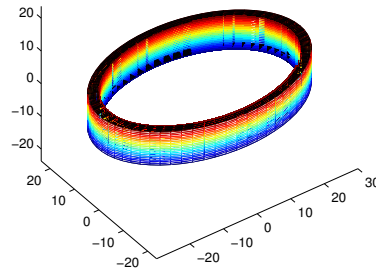
- Verwendung von **Kugelkoordinaten** spart Arbeit.
- Es gilt $\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t)$.

Aufgabe 2:

Gegeben sei das elliptische Rohrstück

$$R \subset \mathbb{R}^3, \quad R : 81 \leq \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 \leq 100, \quad -5 \leq z \leq 5.$$

Das Rohrstück habe die konstante Dichte ρ .



Berechnen Sie das Volumen, die Masse und das Trägheitsmoment des Rohrstücks bzgl. der y -Achse mittels Integration. Verwenden Sie elliptische Zylinderkoordinaten

$$x = 3r \cos(\varphi), \quad y = 2r \sin(\varphi), \quad z = z.$$

Hinweise:

$$\cos^2(\phi) = \frac{\cos(2\phi) + 1}{2}.$$

Ohne Taschenrechner muss am Ende kein Zahlenwert berechnet werden. Es genügt die Integrationsgrenzen in die berechneten Stammfunktionen einzusetzen.

Abgabetermine: 13.01.–17.01.25