Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2024/25**
Prof. Dr. I. Gasser, Dr. H. P. Kiani

Analysis III
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 5, Präsenzaufgaben

Aufgabe 1: Gegeben ist das folgende Optimierungsproblem:

$$\begin{aligned} \text{Bestimmen Sie die Minima von} \quad & f(x,y) \;=\; 1-2xy \\ \text{unter der Nebenbedingung} \quad & g(x,y) = x^2+4y^2-8 \le 0\,. \end{aligned} \tag{1}$$

a) Gibt es lokale Minima im Innern des zulässigen Bereiches, d.h. für $x^2+4y^2-8<0$? Begründen Sie ihre Antwort.
(Hinweis: lokale Minima im Innern der zulässigen Menge sind auch lokale Minima des unrestringierten Problems: $\min_{x,y\in\mathbb{R}} \quad f(x,y)=1-2xy$.)

b) Bestimmen Sie alle globalen Minima von f unter der Nebenbedingung

$$g(x,y) = x^2+4y^2-8 = 0$$

mit Hilfe der Lagrangeschen Multiplikatoren-Regel. Überprüfen Sie zunächst die Regularitätsbedingung.

Bemerkung: Die Aufgabe kann natürlich auch durch Elimination einer der Variablen gelöst werden. Hier soll aber an einem einfachen Beispiel die neu eingeführte Lösungsmethode geübt werden.

c) Geben Sie alle globalen Minima des Optimierungsproblems (1) an.
(Hinweis: nutzen Sie a) und b))

Aufgabe 2: Gesucht seien die Extrema der Funktion

$$f(x,y) \;=\; 2\,\ln\left(\frac{x}{y}\right) + x + 5y$$

unter der Nebenbedingung

$$g(x,y) \;=\; x\,y - 1 = 0.$$

a) Zeigen Sie, dass $(x_0,y_0)^T = (1,1)^T$ mit einem geeigneten festen λ ein zulässiger, stationärer Punkt der Lagrange–Funktion $F = f + \lambda\, g$ ist und überprüfen Sie die Regularitätsbedingung im Punkt $(x_0,y_0)^T = (1,1)^T$.

b) Untersuchen Sie den stationären Punkt $(x_0,y_0)^T = (1,1)^T$ auf seinen Typ hin. Stellen Sie dazu die Hesse–Matrix $\boldsymbol{H}_{x,y}F(x_0,y_0)$ auf und überprüfen Sie deren Definitheit auf dem Tangentialraum $\ker\left(Dg(x_0,y_0)\right)$.

Bearbeitung: 16.–20.12 .24