Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2024/25**
Prof. Dr. I. Gasser
Dr. H. P. Kiani

Analysis III
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 4, Hausaufgaben

Aufgabe 1:

Durch die Relation $g(x,y) = x^4 - x^2 + y^2 = 0$ ist eine Kurve im $\mathbb{R}^2$ implizit gegeben. Bestimmen Sie die Symmetrien dieser Kurve, die singulären Punkte (+ Klassifikation) und die Kurvenpunkte mit horizontaler bzw. vertikaler Tangente.

Aufgabe 2: Gegeben sei $g(x,y) := x^4 + y^4 + 8xy = 0\,.$

a) (i) Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen, dass $g(x,y)$ in der Nähe von $(x_0,y_0)^T := (2,-2)^T$ nach y aufgelöst werden kann. Das heißt, dass es eine Funktion $f(x)$ mit $f(2) = -2$ gibt, so dass in geeigneten Umgebungen von x_0 bzw. y_0 folgende Äquivalenz gilt

$$g(x,y) = 0 \iff y = f(x)\,.$$

(ii) Berechnen Sie das Taylor Polynom ersten Grades der Funktion f aus Teil i) zum Entwicklungspunkt $x_0 = 2\,.$

(iii) Berechnen Sie das Taylor Polynom zweiten Grades der Funktion f aus Teil i) zum Entwicklungspunkt $x_0 = 2\,.$

b) Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen, dass die Lösungsmenge von

$$g(x,y,z) := (x^2 - 2e^{xy})z + 2 = 0$$

in einer Umgebung des Punktes $P_0 := (x_0,y_0,z_0)^T := (0,1,1)^T$ nach x aufgelöst werden kann. Das heißt, dass es eine Funktion $f(y,z)$ mit $f(1,1) = 0$ gibt, so dass in geeigneten Umgebungen von x_0, y_0, z_0 folgende Äquivalenz gilt

$$g(x,y,z) = 0 \iff x = f(y,z)\,.$$

Nach welcher(n) anderen Variablen kann nach dem Satz über implizite Funktionen aufgelöst werden?

Abgabe: 02.–06.12.24