Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2024/25**
Prof. Dr. I. Gasser
Dr. H. P. Kiani

Analysis III
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 2, Präsenzaufgaben

Aufgabe 1:

a) Beweisen Sie die folgende Bemerkung aus Seite 24 des Skripts

Bemerkung: Ist $\Phi : D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}^3$ eine $\mathcal{C}^2$-Funktion, so folgt $\mathbf{rot}(\nabla\Phi) = \mathbf{0}$.

Dass heißt: Gradientenfelder sind stets rotationsfrei.

b) Welche der folgenden Vektorfelder $\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{f}$: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$\boldsymbol{g}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x^2+2z\\y^2x+z\\2x+y\end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{f}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2xz\\-2yz\\x^2-y^2\end{pmatrix}$$

kann/können kein Gradientfeld einer $\mathcal{C}^2$-Funktion $\Phi, : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sein?

Aufgabe 2:

Gegeben sind die Abbildungen $f, g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$f(x,y) := 3x - 5y, \qquad g(x,y) := \frac{1}{5}(x^2+y^2) + 1\,.$$

a) Berechnen Sie die Gradienten von f und g.

b) Zeichnen Sie für f die Höhenlinien $f^{-1}(C) := \{(x,y)^{\mathrm{T}} : f(x,y) = C\}$ zu den Funktionswerten $C_1 = 5, C_2 = 0$ und $C_3 = -10$.
Heften Sie in den Punkten $P_1 = \binom{0}{-1}, P_2 = \binom{5}{3}$ und $P_3 = \binom{-5}{-1}$ jeweils die Richtung des Gradienten an.

c) Zeichnen Sie für g die Höhenlinien $g^{-1}(C) := \{(x,y)^{\mathrm{T}} : g(x,y) = C\}$ zu den Funktionswerten $C_4 = \frac{6}{5}, C_5 = \frac{21}{5}$ und $C_6 = 6$.
Heften Sie in den Punkten $P_4 = \binom{0}{-1}, P_5 = \binom{4}{0}$ und $P_6 = \binom{3}{4}$ jeweils die Richtung des Gradienten an.

d) Wie hängt die Richtung des Gradienten in einem festen Punkt mit der Richtung der Höhenlinie durch diesen Punkt zusamme?

Zusatzaufgabe, nur für die ganz schnellen Studierenden:

Gegeben sei das Vektorfeld

$$\boldsymbol{f}\,(x, y, z) = (x^2 + y + 4z,\, y^2 + 2z + 5x,\, z^2 + 3x + 6y\,)^{\mathrm{T}.}$$

Berechnen Sie die Ausdrücke

$$\mathbf{grad}(\mathrm{div}\ \boldsymbol{f}\,) \qquad \text{bzw.} \qquad \mathbf{rot}(\mathrm{div}\ \boldsymbol{f}\,)\,, \qquad \text{bzw.} \qquad \mathbf{rot}\,(\mathbf{rot}\ \ \boldsymbol{f}\,)$$

falls diese definiert sind. Einer der Ausdrücke verschwindet für die vorgegebene Funktion $\boldsymbol{f}$ identisch. Zeigen Sie mit Hilfe eines Gegenbeispiels, dass dieser Ausdruck nicht für beliebige $\boldsymbol{f}$ identisch verschwindet.

Bearbeitung: 04.–08.11.24