Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2024/25**
Prof. Dr. I. Gasser
Dr. H. P. Kiani

Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 2, Hausaufgaben

Aufgabe 1: (2+2+2+4 Punkte)

Berechnen Sie die Jacobi–Matrizen folgender Funktionen und deren Determinanten.

Überall wo die Determinante der Jacobi–Matrix nicht verschwindet, ist die jeweilige Funktion umkehrbar. Für welche Werte der Variablen verschwinden die Determinanten der Jacobi-Matrizen der gegebenen Funktionen?

$$\boldsymbol{f}^{[1]} : \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ xy \end{pmatrix} \end{cases} \qquad \boldsymbol{f}^{[2]} : \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u - 2v \\ u \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{f}^{[3]} = \boldsymbol{f}^{[2]} \circ \boldsymbol{f}^{[1]}$$

$$\boldsymbol{f}^{[4]} : \begin{cases} \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^3, \quad a, b, c \in \mathbb{R}^+ \\ \begin{pmatrix} r \\ \phi \\ \theta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a \cdot r \cdot \cos\phi \cos\theta \\ b \cdot r \cdot \sin\phi \cos\theta \\ c \cdot r \cdot \sin\theta \end{pmatrix} \end{cases}$$

Tipp zu $\boldsymbol{f}^{[4]}$: Für die Transformation von Kugelkoordinaten auf kartesischen Koordinaten

$$\boldsymbol{g} : \mathbb{R} \times [0, 2\pi] \times [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^3, \qquad \boldsymbol{g} \begin{pmatrix} r \\ \phi \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\phi)\cos(\theta) \\ r\sin(\phi)\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \end{pmatrix}$$

gilt nach Vorlesung

$$\det(\boldsymbol{J}\,\boldsymbol{g}\,(r, \phi, \theta)) = r^2 \cos(\theta)\,.$$

Aufgabe 2: (3+3+4 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $f(\boldsymbol{x}) := -x^2 - y^2 + 2x + z$.

a) Geben Sie eine Gleichung für die Niveaufläche $N_{\boldsymbol{x}^0}$ der Funktion f im Punkt $\boldsymbol{x}^0 = (1, 2, 3)^{\mathrm{T}}$ an, und berechnen Sie den Gradienten von f in $\boldsymbol{x}^0$.

b) Berechnen Sie die Richtungsableitungen $D_{\boldsymbol{w}^{[j]}} f(\boldsymbol{x}^0)$ für $j = 1, 2, 3,$
$\boldsymbol{v}^{[1]} = (1,1,1)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{v}^{[2]} = (1,1,0)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{v}^{[3]} = (1,0,0)^{\mathrm{T}}$
und $\boldsymbol{w}^{[j]} := \frac{\boldsymbol{v}^{[j]}}{\|\boldsymbol{v}^{[j]}\|}$. Können Sie für $j = 1, 2, 3$ entscheiden, ob es sich bei $\boldsymbol{w}^{[j]}$ um eine Aufstiegs- oder Abstiegsrichtung handelt?

c) Berechnen Sie die Richtungsableitung $D_{\tilde{\boldsymbol{v}}} f(\boldsymbol{x}^0)$ für $\tilde{\boldsymbol{v}} = 1/\sqrt{17}(0,-4,1)^{\mathrm{T}}$. Handelt es sich um eine Aufstiegs- oder Abstiegsrichtung?
Berechnen Sie den Funktionswert im Punkt $\boldsymbol{x}^0 + 2\sqrt{17}\,\tilde{\boldsymbol{v}}$.
Ergibt sich da nicht ein Widerspruch?
Berechnen Sie nun den Funktionswert im Punkt $\boldsymbol{x}^0 + \frac{\sqrt{17}}{2}\,\tilde{\boldsymbol{v}}$.
Erklären Sie Ihre Ergebnisse.

Abgabe: 04.–08.11.24