

Dr. Hanna Peywand Kiani

Hörsaalübung 7 Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Infos/ Lehrmaterial unter

<http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/index.html>

**Kurvenintegrale, Oberflächenintegrale,
Sätze von Green und Gauß**

Die ins Netz gestellten Kopien der Unterlagen sollen nur die Mitarbeit während der Veranstaltung erleichtern. Ohne die in der Veranstaltung gegebenen zusätzlichen Erläuterungen sind diese Unterlagen unvollständig (z. Bsp. fehlen oft wesentliche Voraussetzungen). Tipp- oder Schreibfehler, die rechtzeitig auffallen, werden nur mündlich während der Veranstaltung angesagt. Eine Korrektur im Netz erfolgt NICHT!

Eine Veröffentlichung dieser Unterlagen an anderer Stelle ist untersagt!

Klausurberatung: Montag 27.01. ca. 13:15 - 14:00 Audimax I

Kurvenintegrale

Gegeben : Kurve $\mathbf{c} : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ (stückweise C^1)

$\mathbf{c}(a)$ = Anfangspunkt, $\mathbf{c}(b)$ = Endpunkt.

Kurvenintegral über stetige skalare Funktion $g : D \rightarrow \mathbb{R}^1$

$$\int_{\mathbf{c}} g(\mathbf{x}) d\mathbf{s} := \int_a^b g(\mathbf{c}(t)) \cdot \|\dot{\mathbf{c}}(t)\| dt$$

Kurvenintegral über stetiges Vektorfeld $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^n$

$$W := \int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} := \int_a^b \langle \mathbf{f}(\mathbf{c}(t)), \dot{\mathbf{c}}(t) \rangle dt = \int_a^b \langle \mathbf{f}(\mathbf{c}(t)), \frac{\dot{\mathbf{c}}(t)}{\|\dot{\mathbf{c}}(t)\|} \rangle \|\dot{\mathbf{c}}(t)\| dt$$

Motivation: \mathbf{f} Kraftfeld, W Arbeit bei Bewegung eines Massepunktes von $\mathbf{c}(a)$ nach $\mathbf{c}(b)$ längs der Kurve.

Kurvenintegral entlang rückwärts durchlaufener Kurve:

$$\int_{-c} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = - \int_c f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

Kurvenintegral entlang geschlossener Kurven: $\oint_c f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$

Ist $f(\mathbf{x})$ ein Geschwindigkeitsfeld eines strömenden Mediums, so heißt

$\oint_c f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ **Zirkulation** des Feldes f .

Das Feld heißt **Wirbelfrei** wenn

$$\oint_c f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0 \quad \forall \text{ geschlossenen } c.$$

D.h. das Kurvenintegral ist wegunabhängig. Der Wert von $\int_c f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ hängt nur von Anfangs- und Endpunkt ab:

$$\int_c f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \phi(\mathbf{c}(b)) - \phi(\mathbf{c}(a))$$

Wann geht das?

Potentiale

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ Vektorfeld,

$\phi : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **Potential** von \mathbf{f} , wenn $\forall \mathbf{x} \in D$:

$$\nabla \phi(\mathbf{x}) = \text{grad } \phi(\mathbf{x})^T = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

Im \mathbb{R}^3 heißt das $\mathbf{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} f_1(x, y, z) \\ f_2(x, y, z) \\ f_3(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_x(x, y, z) \\ \phi_y(x, y, z) \\ \phi_z(x, y, z) \end{pmatrix}$

Hauptsatz:

$$\text{Ist } \mathbf{f} = \nabla \phi = (\text{grad } \phi)^T, \text{ so gilt } \int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \phi(\mathbf{c}(b)) - \phi(\mathbf{c}(a))$$

Finden wir zu jedem \mathbf{f} ein Potential?

Zur Erinnerung: $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} \phi) = 0 \quad \forall C^2$ Funktionen ϕ . Siehe Präsenzblatt 2.

$$\mathbf{f} = (\operatorname{grad} \phi)^T \implies \operatorname{rot} \mathbf{f} = 0$$

Es kann also im \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^3 nur dann ein Potential geben, wenn $\boxed{\operatorname{rot} \mathbf{f} = 0}$ gilt.

Rotation des Vektorfeldes bei $n=3$

$$\operatorname{rot} \mathbf{f}(x, y, z) := \begin{pmatrix} (f_3)_y - (f_2)_z \\ (f_1)_z - (f_3)_x \\ (f_2)_x - (f_1)_y \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{pmatrix}$$

Rotation des Vektorfeldes bei $n=2$:

$$\operatorname{rot} \mathbf{f}(x, y) = 0 \iff (f_2)_x - (f_1)_y = 0$$

Für $n = 2$ oder 3 :

$$\boxed{\operatorname{rot} \mathbf{f} \neq 0 \implies \text{Es gibt kein Potential}}$$

Integrabilitätsbedingung im \mathbb{R}^n für beliebiges $n \in \mathbb{N}$:

$D \subset \mathbb{R}^n$ einfach zusammenhängend: Jf symmetrisch $\iff \exists$ Potential

Ein Gebiet D ist Einfach zusammenhängend \iff

Jede geschlossene Kurve in D kann innerhalb D stetig auf ein Punkt zusammengezogen werden

\iff Das Gebiet hat keine Löcher.

Konstruktion von ϕ

Beispiel 1) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$,
$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2y^2 - e^x z \\ 2x^3y + \sin z \\ y \cos z - e^x \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} \phi_x \\ \phi_y \\ \phi_z \end{pmatrix}$$

Falls
$$\phi_x = 3x^2y^2 - e^x z$$

dann
$$\phi(x, y, z) =$$

und
$$\phi_y =$$

andererseits
$$\phi_y \stackrel{!}{=} f_2 = 2x^3y + \sin z$$

\implies
$$C_y(y, z) \stackrel{!}{=}$$

z.B.
$$C(y, z) =$$

Also

$$\phi(x, y, z) = x^3 y^2 - e^x z + y \sin z + \tilde{C}(z)$$

und

$$\phi_z = -e^x + y \cos z + \tilde{C}'(z)$$

andererseits

$$\phi_z \stackrel{!}{=} f_3 = y \cos z - e^x$$

\implies

$$\tilde{C}'(z) \stackrel{!}{=} 0 \implies \tilde{C}(z) = k$$

also

$$\phi(x, y, z) = x^3 y^2 - e^x z + y \sin z + k \quad k \in \mathbb{R}$$

Beispiel 2)
$$\mathbf{f} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy + \frac{3x^2}{1+x^3} \cdot \cos(y) \\ x^2 + \ln(1+x^3) \cdot \sin(y) \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} \phi_x \\ \phi_y \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} x \in \mathbb{R}^+ \\ y \in \mathbb{R} \end{array}$$

Das sieht kompliziert aus! Lohnt sich der Versuch des Integrierens?

$$\text{rot } \mathbf{f}(x, y) = (f_2)_x - (f_1)_y$$

Beispiel 3) $D = \mathbb{R}^3$

$$\mathbf{f} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x, y, z) \\ f_2(x, y, z) \\ f_3(x, y, z) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} yz \cos(x) \\ z \sin(x) + 2y + z \\ y \sin(x) + 2y \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} \phi_x \\ \phi_y \\ \phi_z \end{pmatrix}$$

$$J\mathbf{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} (f_1)_x & (f_1)_y & (f_1)_z \\ (f_2)_x & (f_2)_y & (f_2)_z \\ (f_3)_x & (f_3)_y & (f_3)_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots\dots\dots & z \cos(x) & y \cos(x) \\ & \dots\dots\dots & \\ & & \dots\dots\dots \end{pmatrix}$$

\implies

Beispiel 4: (Wiederholungsklausur 08/09, Hinze, Kiani)

Gegeben seien das Kraftfeld \mathbf{K} und die Kurve \mathbf{c}

$$\mathbf{K}(x, y, z) := \begin{pmatrix} x \\ z \\ y \\ z \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}(t) := \begin{pmatrix} t \cdot \cos(t) \\ t \cdot \sin(t) \\ t \end{pmatrix} \quad t \in [1, 3].$$

Berechnen Sie die Arbeit, die aufgewendet werden muss, um einen Massenpunkt entlang der Kurve \mathbf{c} von $\mathbf{c}(1)$ nach $\mathbf{c}(3)$ zu bewegen.

Lösung:

$$\mathbf{K}(\mathbf{c}(t)) := \quad \dot{\mathbf{c}}(t) :=$$

$$\begin{aligned} \langle K(\mathbf{c}(t), \dot{\mathbf{c}}(t)) \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos(t) - t \cdot \sin(t) \\ \sin(t) + t \cdot \cos(t) \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= (\cos^2(t) - t \sin(t) \cos(t) + \sin^2(t) + t \sin(t) \cos(t) + t^2) \end{aligned}$$

$$\int_1^3 \langle K(\mathbf{c}(t), \dot{\mathbf{c}}(t)) \rangle dt = \int_1^3 (1 + t^2) dt = \left[t + \frac{t^3}{3} \right]_1^3 = 2 + 9 - \frac{1}{3} = \frac{32}{3}.$$

Beispiel 5: (Klausur 08/09, Hinze, Kiani)

Gegeben seien die Vektorfelder $\mathbf{f}, \mathbf{g} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\mathbf{f} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 \\ xy^2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{g} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$$

sowie die Kurve

$$\mathbf{c} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ t \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie Potentiale zu \mathbf{f} und \mathbf{g} , falls dies möglich ist.

b) Berechnen Sie die Kurvenintegrale

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f} d\mathbf{x}, \quad \text{und} \quad \int_{\mathbf{c}} \mathbf{g} d\mathbf{x}.$$

Lösung:

$$\text{a) } \mathbf{f} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 \\ xy^2 \end{pmatrix} \implies \frac{\partial f_1}{\partial y} = 2y \neq \frac{\partial f_2}{\partial x} = y^2 \implies$$

es gibt kein Potential zu \mathbf{f} .

$$\mathbf{g} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}.$$

$$\text{b) } \mathbf{c} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ t \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{c}}(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{c}(t)) = \quad \langle \mathbf{f}(\mathbf{c}(t)), \dot{\mathbf{c}}(t) \rangle =$$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f} d\mathbf{x} &= \int_0^{2\pi} \langle \mathbf{f}(\mathbf{c}(t)), \dot{\mathbf{c}}(t) \rangle dt = \int_0^{2\pi} t^2(\cos t - \sin t) dt \\
&= t^2(\cos t + \sin t) \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} 2t(\cos t + \sin t) dt \\
&= 4\pi^2 - [2t(\sin t - \cos t)]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} 2(\sin t - \cos t) dt = 4\pi^2 + 4\pi.
\end{aligned}$$

Für $\mathbf{g} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$ gilt mit dem Potential $\phi(x, y) = xy^2$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{c}} \mathbf{g} d\mathbf{x} &= \int_0^{2\pi} \langle \mathbf{g}(\mathbf{c}(t)), \dot{\mathbf{c}}(t) \rangle dt \\
&= \phi(\mathbf{c}(b)) - \phi(\mathbf{c}(a)) =
\end{aligned}$$

Satz von Green:

$\mathbf{f} : C^1$ Vektorfeld, $D \subset \mathbb{R}^2$ sei ein Gebiet.

$K \subset D$: kompakt und bzgl. beider Variablen projizierbar.

$\mathbf{c}(t)$ stkw. C^1 Parametrisierung von ∂K , positiv umlaufen, dann

$$\oint_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \oint_{\mathbf{c}} \langle \mathbf{f}, \mathbf{T} \rangle \, ds = \int_K \operatorname{rot}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) \, dx$$

Bei Strömungen: $\operatorname{rot}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = 0$: Wirbelfreiheit

Gleiche Formel für $\tilde{\mathbf{f}} = (-f_2, f_1)$ liefert:

$$\oint_{\partial K} \langle \mathbf{f}, \mathbf{n} \rangle \, ds = \int_K \operatorname{div}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) \, dx$$

Bei Strömungen: **Fluss der Strömung aus Rand K heraus:**

$\operatorname{div}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = 0$: Quellen- und Senkenfreiheit

Beispiel 6: Green (Alte Klausure, Stuckmeier/Kiani)

Sei C der positiv orientierte Rand der Menge

$$D := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4 \right\}.$$

Berechnen Sie $\int_C \mathbf{f}(x, y) d(x, y)$ für das Vektorfeld

$$\mathbf{f}(x, y) = \begin{pmatrix} \cos(x^2 + 1) - \frac{y^3}{3} \\ \frac{x^3}{3} + \arctan(e^{-y}) \end{pmatrix}$$

Lösung:

Da f selbst nicht sehr integrierfreundlich aussieht, dafür aber

$$\operatorname{rot} f(x, y) = x^2 + y^2$$

verwendet man den Satz von Green und erhält

$$I := \int_{\partial D} f(x, y) ds = \int_D (x^2 + y^2) d(x, y)$$

Übergang zu Polarkoordinaten liefert

$$I = \int_0^2 \int_0^{2\pi} r^2 \cdot r d\phi dr = 2\pi \left. \frac{r^4}{4} \right|_0^2 = 8\pi.$$

Beispiel 7: Gauß/Fluss (Alte Klausur, Stuckmeier/Kiani) Gegeben seien die Menge

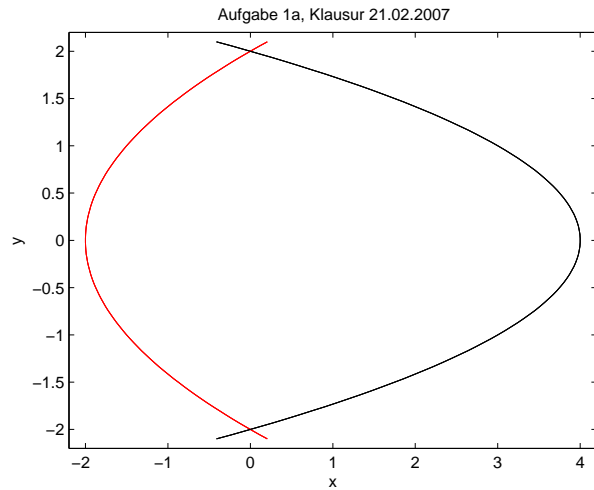
$$D := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \frac{y^2}{2} - 2 \leq x \leq 4 - y^2 \right\}$$

und das das Geschwindigkeitsfeld \mathbf{f}

$$\mathbf{f} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x + e^{-y} \cos y \\ 2y + e^{-x} \sin x \end{pmatrix} .$$

Berechnen Sie den Fluss von \mathbf{f} durch den Rand der Menge D .

Wie man der Skizze entnimmt gilt (vgl. Hausaufgabe 1, Blatt 6)



$$D := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq y \leq 2, \frac{y^2}{2} - 2 \leq x \leq 4 - y^2 \right\}$$

Der Fluss F ergibt sich nach dem Satz von Green/Gauß in der Ebene:

$$F = \int_{-2}^2 \int_{\frac{y^2}{2}-2}^{4-y^2} \operatorname{div} \mathbf{f}(x, y) \, dx \, dy$$

$$=$$

Oberflächenintegrale

$F =$ Fläche im \mathbb{R}^3

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = p(u, v); (u, v)^T \in K \subset \mathbb{R}^2 \right\}$$

K : kompakt, $\partial p/\partial u$, $\partial p/\partial v$ linear unabhängig

Beispiel:

Kugel mit Radius 2 um Null: $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$

Kugeloberfläche: $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

In Kugelkoordinaten:

$$\text{Kugel: } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(\phi) \cos(\theta) \\ r \sin(\phi) \cos(\theta) \\ r \sin(\theta) \end{pmatrix}, \quad \phi \in [0, 2\pi], \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], r \in [0, 2]$$

Kugeloberfläche: $F : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = p(\phi, \theta) = \begin{pmatrix} 2 \cos(\phi) \cos(\theta) \\ 2 \sin(\phi) \cos(\theta) \\ 2 \sin(\theta) \end{pmatrix}$

Parameterbereich: $K : \phi \in [0, 2\pi], \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Flächeninhalt einer Fläche F im \mathbb{R}^3 :

Näherung: Summe von Flächen von Parallelogrammen

Fläche Parallelogramm mit Seiten \mathbf{a}, \mathbf{b} ist $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$

Immer feinere Näherung: Summe — — — $>$ Integral

$$\text{Flächeninhalt} = \int_K 1 \cdot \left\| \frac{\partial p}{\partial u} \times \frac{\partial p}{\partial v} \right\| d(u, v) =: \int_{p(K)} 1 \cdot dO := \int_F dO$$

$$dO := \left\| \frac{\partial p}{\partial u} \times \frac{\partial p}{\partial v} \right\| d(u, v)$$

Oberflächenintegral 1. Art: $f : \longrightarrow \mathbb{R}^1$

$$I_1 = \int_F f dO := \int_{p(K)} f \cdot dO = \int_K f(p(u, v)) \cdot \left\| \frac{\partial p}{\partial u} \times \frac{\partial p}{\partial v} \right\| d(u, v)$$

Beispiel: Masse = \int_F Dichte dO

Oberflächenintegral 2. Art: $f : \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_F \mathbf{f} dO := \int_{p(K)} \mathbf{f} \cdot dO = \int_K \langle \mathbf{f}(p(u, v)), \mathbf{n} \rangle \cdot \left\| \frac{\partial p}{\partial u} \times \frac{\partial p}{\partial v} \right\| d(u, v) \\ &= \int_K \langle \mathbf{f}(p(u, v)), \frac{\partial p}{\partial u} \times \frac{\partial p}{\partial v} \rangle d(u, v) \end{aligned}$$

Beispiel: \mathbf{f} = Geschwindigkeitsfeld einer stationären Strömung \implies

I_2 = Fluidmenge, die pro Zeiteinheit durch die Fläche hindurch fließt

Integralsatz von Gauß

Sei G kompakt, meßbar, Standardbereich im \mathbb{R}^3

$$\underbrace{\int_G \operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}}_{\text{Bereichsintegral im } \mathbb{R}^3} = \underbrace{\int_{\partial G} \langle \mathbf{f}(\mathbf{x}), \underbrace{\mathbf{n}(\mathbf{x})}_{\text{äußere Normale}} \rangle \, dO}_{\text{Oberflächenintegral 2. Art}}$$

$$= \int_K \langle \mathbf{f}(p(u, v)), \frac{\partial p}{\partial u} \times \frac{\partial p}{\partial v} \rangle \, d(u, v)$$

bei richtiger Reihenfolge im Kreuzprodukt

Beispiel 8: Gegeben seien das Flächenstück

$$F := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 \leq 4, x = y^2 + z^2 \right\}$$

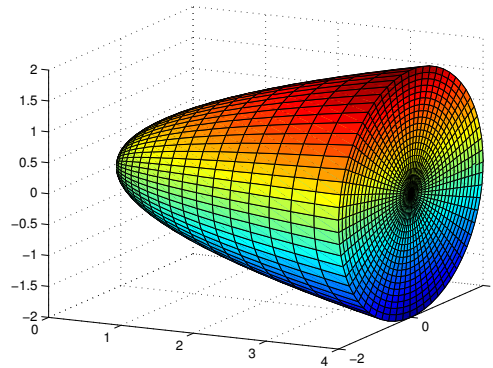
und das Vektorfeld

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y^2 + 2z^2 \\ y + x - z \\ z + x - y \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie das Oberflächenintegral $\int_F f(x, y, z) \, d\sigma$ direkt.

b) Wie groß ist der Fluss von f durch die Oberfläche des Körpers

$$P := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 \leq 4, y^2 + z^2 \leq x \leq 4 \right\} ?$$



c) Berechnen Sie das Oberflächenintegral aus Teil a) mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes.

Lösung: $y^2 + z^2 \leq 4$, $x = y^2 + z^2$

$$\text{a) } p(r, \phi) = \begin{pmatrix} r^2 \\ r \cos(\phi) \\ r \sin(\phi) \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial p}{\partial \phi} = \begin{pmatrix} 0 \\ -r \sin(\phi) \\ r \cos(\phi) \end{pmatrix} \quad \frac{\partial p}{\partial r} = \begin{pmatrix} 2r \\ \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial p}{\partial \phi} \times \frac{\partial p}{\partial r} = \begin{pmatrix} -r \\ 2r^2 \cos(\phi) \\ 2r^2 \sin(\phi) \end{pmatrix}$$

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y^2 + 2z^2 \\ y + x - z \\ z + x - y \end{pmatrix} \quad p(r, \phi) = \begin{pmatrix} r^2 \\ r \cos(\phi) \\ r \sin(\phi) \end{pmatrix}$$

$$f(p(r, \phi)) = \begin{pmatrix} 3r^2 \\ r^2 + r(\cos(\phi) - \sin(\phi)) \\ r^2 + r(\sin(\phi) - \cos(\phi)) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \langle f, \frac{\partial p}{\partial \phi} \times \frac{\partial p}{\partial r} \rangle &= -r(3r^2) + (2r^2 \cos(\phi)) \cdot (r^2 + r(\cos(\phi) - \sin(\phi))) \\ &\quad + (2r^2 \sin(\phi)) \cdot (r^2 + r(\sin(\phi) - \cos(\phi))) \\ &= -3r^3 + 2r^4(\cos(\phi) + \sin(\phi)) + 2r^3(\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi) - 2\cos(\phi)\sin(\phi)) \end{aligned}$$

$$\int_0^2 \int_0^{2\pi} \left\langle f, \frac{\partial p}{\partial \phi} \times \frac{\partial p}{\partial r} \right\rangle d\phi dr =$$

$$\int_0^2 \int_0^{2\pi} -r^3 + 2r^4(\cos(\phi) + \sin(\phi)) + 2r^3(-\sin(2\phi)) d\phi dr = -8\pi$$

b) Fluss durch die Oberfläche des Körpers $P : y^2 + z^2 \leq 4, y^2 + z^2 \leq x \leq 4$

$$y = r \cos(\phi), \quad z = r \sin(\phi) \quad \text{mit} \quad \phi \in [0, 2\pi], \quad r \in [0, 2].$$

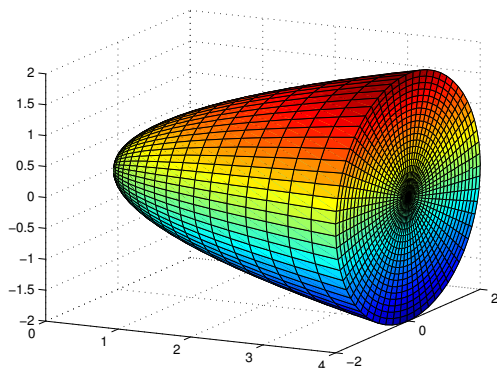
$$x = x \quad \text{mit} \quad 0 \leq x \leq 4$$

$$\mathbf{f} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y^2 + 2z^2 \\ y + x - z \\ z + x - y \end{pmatrix} \implies \operatorname{div} (\mathbf{f}(x, y, z)) =$$

Zylinderkoordinaten!

$$\begin{aligned} \int_P \operatorname{div} (x, y, z) d(x, y, z) &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^x dx d\phi dr \\ &= 6\pi \int_0^2 r(4 - r^2) dr = 24\pi. \end{aligned}$$

c) Der Rand von P setzt sich zusammen aus zwei Flächenstücken, nämlich



die Fläche aus Teil a) und

das Flächenstück F_2 mit

$$x = 4, \quad y = r \cos(\phi), \quad z = r \sin(\phi)$$

$$\phi \in [0, 2\pi], \quad r \in [0, 2].$$

Nach Gauß gilt:

$$\text{Gesamtfluss} = \text{Fluss durch } F + \text{Fluss durch } F_2 = \int_K \operatorname{div}(x, y, z) d(x, y, z)$$

Der Fluss durch F_2 ist viel einfacher zu berechnen als Fluss durch F_2

$$p(r, \phi) = \begin{pmatrix} 4 \\ r \cos(\phi) \\ r \sin(\phi) \end{pmatrix} \implies \frac{\partial p}{\partial \phi} = \begin{pmatrix} 0 \\ -r \sin(\phi) \\ r \cos(\phi) \end{pmatrix} \quad \frac{\partial p}{\partial r} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial p}{\partial \phi} \times \frac{\partial p}{\partial r} = \begin{pmatrix} -r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad f_1(x, y, z) = x + 2(y^2 + z^2)$$

$$\langle f(p(r, \phi)), \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix} 4 + 2r^2 \\ \text{egal !} \\ \text{egal !} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = 4r + 2r^3$$

$$\int_0^2 \int_0^{2\pi} 4r + 2r^3 d\phi dr = 2\pi \left[2r^2 + \frac{r^4}{2} \right]_0^2 = 32\pi$$

Zusammen mit b) erhält man für den Fluss durch die gewölbte Fläche wie (nach Teil a)) erwartet

Fluss durch F = Gesamtfluss - Fluss durch F_2

$$= 24\pi - 32\pi = -8\pi.$$