

Dr. Hanna Peywand Kiani

Hörsaalübung 3 Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Infos/ Lehrmaterial unter

<http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/index.html>

Taylor-Polynome, Polar-, Zylinder- und Kugelkoordinaten

Die ins Netz gestellten Kopien der Unterlagen sollen nur die Mitarbeit während der Veranstaltung erleichtern. Ohne die in der Veranstaltung gegebenen zusätzlichen Erläuterungen sind diese Unterlagen unvollständig (z. Bsp. fehlen oft wesentliche Voraussetzungen). Tipp- oder Schreibfehler, die rechtzeitig auffallen, werden nur mündlich während der Veranstaltung angesagt. Eine Korrektur im Netz erfolgt NICHT!

Eine Veröffentlichung dieser Unterlagen an anderer Stelle ist untersagt!

Taylorynome

Gegeben: $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ z.B. $f : (x, y, z)^T \mapsto f(x, y, z)$

Erste partielle Ableitungen \rightarrow **Gradient** von f

$$\mathbf{grad} f(\mathbf{x}) := (f_{x_1}(\mathbf{x}), \dots, f_{x_n}(\mathbf{x}))^T$$

In unserem Beispiel also mit $\mathbf{x} = (x, y, z)^T$

$$\mathbf{grad} f(x_0, y_0, z_0) = (f_x(x_0, y_0, z_0), f_y(x_0, y_0, z_0), f_z(x_0, y_0, z_0))$$

Hessematrix von f :

Matrix der zweiten Ableitungen $H_{ij}(x, y) = f_{x_i x_j}$

$$\mathbf{J}(\text{grad } f(\mathbf{x}))^T = \mathbf{J} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \text{grad } f_{x_1}(\mathbf{x}) \\ \text{grad } f_{x_2}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \text{grad } f_{x_n}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

In unserem Beispiel mit $\mathbf{x} = (x, y, z)^T$ also $\begin{pmatrix} \text{grad } f_x(\mathbf{x}) \\ \text{grad } f_y(\mathbf{x}) \\ \text{grad } f_z(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$

$$Hf((x_0, y_0, z_0)) := \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0, y_0, z_0) & f_{xy}(x_0, y_0, z_0) & f_{xz}(x_0, y_0, z_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0, z_0) & f_{yy}(x_0, y_0, z_0) & f_{yz}(x_0, y_0, z_0) \\ f_{zx}(x_0, y_0, z_0) & f_{zy}(x_0, y_0, z_0) & f_{zz}(x_0, y_0, z_0) \end{pmatrix}$$

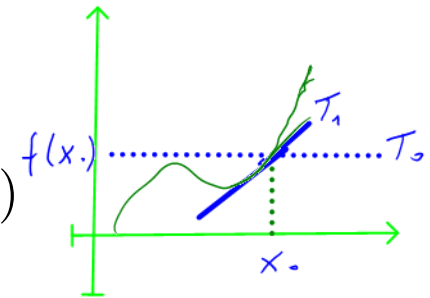
f 2-mal stetig diff.bar \implies Hessematrix ist symmetrisch!

Zur Erinnerung: im \mathbb{R}^1 :

Taylorpolynom 0.ten Grades mit Entwicklungspunkt x_0 : $T_0(x) = f(x_0)$

Taylorpolynom 1.ten Grades mit Entwicklungspunkt x_0 :

$$\underline{T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = T_0(x) + f'(x_0)(x - x_0)}$$



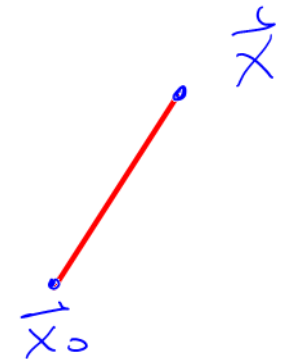
Taylorpolynom 2.ten Grades:

$$\begin{aligned} T_2(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 \\ &= T_1(x) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 \\ &= T_1(x) + \frac{1}{2!} (x - x_0) f''(x_0) (x - x_0) \end{aligned}$$

NEU: im \mathbb{R}^n : Entwickle $f(\underline{g}(h))$, $\underline{g}(h) := \underline{x}_0 + h(\underline{x}^1 - \underline{x}_0)$

$$\tilde{f}(h) \in \mathbb{R}^1$$

$$h \in [0, 1]$$



T_1 für \tilde{f} im \mathbb{R}_1 mit $h_0 = 0$

$$\tilde{f}(\underline{g}(0)) + \text{grad } \tilde{f}(\underline{g}(0)) \cdot \underbrace{(\underline{x}^1 - \underline{x}_0)}_{\underline{g}'(h)} (h - h_0) \Big|_{h=1} \quad \underline{g}(0) = \underline{x}_0$$

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R}^n$$

$$\mathbb{R}^1 : f'(x) (x - x_0)$$

$$T_0 = f(\mathbf{x}_0), \quad T_1(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \text{grad } f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$$

$$\underline{D \subset \mathbb{R}^2}:$$

$$T_1(x, y) = f(x_0, y_0) + \text{grad } f(x_0, y_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) =$$

$$= f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

$$\underline{D \subset \mathbb{R}^3} \text{ analog:}$$

$$T_1(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0)$$

$$+ f_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0)$$

Also $T_0 + \sum$ aller ersten Ableitungen \times entsprechender Schrittweiten.

$$\underline{D \subset \mathbb{R}^1}: \quad T_2(x) = T_1(x) + \frac{1}{2!} (x - x_0) f''(x_0) (x - x_0).$$

$$\underline{D \subset \mathbb{R}^n}: \quad T_2(\mathbf{x}) = T_1(\mathbf{x}) + \frac{1}{2!} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T H f(\mathbf{x}_0) (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$$

$$\underline{D \subset \mathbb{R}^2}:$$

$$T_2(x, y) = T_1(x, y) + \frac{1}{2!} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \underline{f_{xx}}(x_0, y_0) & \underline{f_{xy}}(x_0, y_0) \\ \underline{f_{yx}}(x_0, y_0) & \underline{f_{yy}}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

ausmultiplizieren

$$= T_1(x, y) + \frac{1}{2!} \left[\underline{f_{xx}}(x_0, y_0) (x - x_0)^2 + \underline{f_{xy}}(x_0, y_0) (x - x_0) (y - y_0) \right. \\ \left. + \underline{f_{yx}}(x_0, y_0) (y - y_0) (x - x_0) + \underline{f_{yy}}(x_0, y_0) (y - y_0)^2 \right]$$

Also $T_2 = T_1 + \frac{1}{2!} \sum$ 2-te Ableitungen \times entsprechende Schrittweiten.

Für C^2 -Funktionen gilt $f_{xy} = f_{yx}$ und damit

$$\begin{aligned}
 T_2(x, y) &= f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \\
 &+ \frac{1}{2!} [f_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)(y - y_0)(x - x_0) \\
 &\quad + f_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2]
 \end{aligned}$$

Beachtet man noch:

$$\binom{2}{0} = \binom{2}{2} = \frac{2!}{(2-2)!2!} = 1, \quad \binom{2}{1} = \frac{2!}{(2-1)!1!} = 2$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

so kann man T_2 auch schreiben als:

$$\begin{aligned}
 T_2(x, y) &= T_1(x, y) + \frac{1}{2!} \left[\binom{2}{2} f_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 \right. \\
 &\quad \left. + \binom{2}{1} f_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + \binom{2}{0} f_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2 \right]
 \end{aligned}$$

$$\underline{D \subset \mathbb{R}^3}: \quad \mathbf{x} = (x, y, z)^T, \quad \mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)^T,$$

$$T_0(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0),$$

$$T_1(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0) + \underline{\langle \text{grad } f(x_0, y_0, z_0), (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \rangle}$$

$$= f \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + f_x \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} (x - x_0) + f_y \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} (y - y_0) + f_z \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} (z - z_0).$$

$$T_2(x, y, z) = \underline{T_1(x, y, z)} + \frac{1}{2!} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix}^T H f(x_0, y_0, z_0) \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} \leftarrow$$

Ausmultiplizieren

$$\begin{aligned} &= T_1(x, y) + \frac{1}{2!} \left[f_{xx}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0)^2 + 2 \cdot f_{xy}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0)(y - y_0) \right. \\ &+ 2 \cdot f_{xz}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0)(z - z_0) + f_{yy}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0)^2 \\ &\left. + 2 \cdot f_{yz}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0)(z - z_0) + f_{zz}(x_0, y_0, z_0)(z - z_0)^2 \right] \end{aligned}$$

Allgemein erhalten wir für $D \subset \mathbb{R}^n$:

$$T_{m+1} = T_m + \frac{1}{(m+1)!} \sum (m+1)\text{-te Ableitungen} \times \text{entsprechende Schrittweiten.}$$

Und speziell für $D \subset \mathbb{R}^2$:

Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ offen und konvex, $\mathbf{x}_0 \in D$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^1$ eine C^{m+1} Funktion

Definiere **Taylorpolynom m -ten Grades**: $T_m(\mathbf{x}; \mathbf{x}_0)$ zu f mit Entwicklungspunkt $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)^T$:

$$T_0(\mathbf{x}) = T_0(x, y) := f(\mathbf{x}_0) = f(x_0, y_0)$$

$$T_m(\mathbf{x}) = T_{m-1}(\mathbf{x}) + \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \frac{\partial^{m-k}}{\partial x^{m-k}} \cdot \frac{\partial^k}{\partial y^k} f(x_0, y_0) (x - x_0)^{m-k} (y - y_0)^k$$

$$\text{Bsp.: } m = 4, k = 2, \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{(1 \cdot 2)(1 \cdot 2)} = 6$$

$$f_{xxyy}, f_{xyxy}, f_{xyyx}, f_{yxxy}, f_{yxyx}, f_{yyxx}$$

Oben hatten wir T_2 . Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
 T_3(x, y) &= T_2(x, y) + \frac{1}{3!} \sum_{k=0}^3 \binom{3}{k} \frac{\partial^{3-k}}{\partial x^{3-k}} \cdot \frac{\partial^k}{\partial y^k} f(x_0, y_0) (x - x_0)^{3-k} (y - y_0)^k \\
 &= T_2(x, y) + \frac{1}{3!} \left[\binom{3}{0} f_{xxx}(x_0, y_0) (x - x_0)^3 + \binom{3}{1} f_{xxy}(x_0, y_0) (x - x_0)^2 (y - y_0) \right. \\
 &\quad \left. \binom{3}{2} f_{xyy}(x_0, y_0) (x - x_0) (y - y_0)^2 + \binom{3}{3} f_{yyy}(x_0, y_0) (y - y_0)^3 \right]
 \end{aligned}$$

Fehlerabschätzung:

Zur Erinnerung: im \mathbb{R}^1

$$T_{m+1}(x) = T_m(x) + \frac{1}{(m+1)!} f^{(m+1)}(x_0) (x - x_0)^{m+1}$$



$$R_m(x) := f(x) - T_m(x) = \frac{1}{(m+1)!} f^{(m+1)}(x_0 + \theta(x - x_0)) (x - x_0)^{m+1}$$

$$\begin{array}{l} \theta \in [0, 1] \\ \theta = 0 \quad \text{liefert} \quad x_0 \\ \theta = 1 \quad \text{''} \quad \quad x \end{array}$$

Analog im \mathbb{R}^2 : Sei wie oben: $D \subset \mathbb{R}^2$ offen und konvex,
 $x_0 \in D$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^{m+1} Funktion

Taylorpolynome:

$$T_0(\mathbf{x}) = T_0(x, y) := f(\mathbf{x}_0) = f(x_0, y_0)$$

$$\underline{T_m(\mathbf{x})} = \underline{T_{m-1}(\mathbf{x})} + \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \frac{\partial^{m-k}}{\partial x^{m-k}} \cdot \frac{\partial^k}{\partial y^k} f(x_0, y_0) (x - x_0)^{m-k} (y - y_0)^k$$

$$\underline{T_{m+1}(\mathbf{x})} = \underline{T_m(\mathbf{x})} + \frac{1}{(m+1)!} \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} \frac{\partial^{m+1-k}}{\partial x^{m+1-k}} \cdot \frac{\partial^k}{\partial y^k} f(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) (x - x_0)^{m+1-k} (y - y_0)^k$$

Restterm / Fehler:

$$R_m(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - T_m(\mathbf{x})$$

$$= \frac{1}{(m+1)!} \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} \frac{\partial^{m+1-k}}{\partial x^{m+1-k}} \cdot \frac{\partial^k}{\partial y^k} f(\mathbf{x}_0 + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)) (x - x_0)^{m+1-k} (y - y_0)^k$$

mit einem $\theta \in [0, 1]$.

$x_0 + 0(x - x_0)$ $x = x_0 + 1 \cdot (x - x_0)$

Beispiel A: Gesucht Taylorpolynome $T_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ zweiten Grades und $T_3(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ dritten Grades, für die Funktion

$$f(x, y) = ye^{x-y} + \sin(x+y) \text{ zum Entwicklungspunkt } \mathbf{x}_0 = (0, 0)^T$$

sowie Abschätzung für das Restglied $|R_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0)|$ im Bereich $|x| \leq 0.2$ und $|y| \leq 0.2$.

Lösung:

$$f(0, 0) = 0e^{0-0} + \sin(0+0) = 0$$

$$f_x = ye^{x-y} + \cos(x+y)$$

$$f_x(0, 0) = 1$$

$$\begin{aligned} f_y &= e^{x-y} - ye^{x-y} + \cos(x+y) \\ &= (1-y)e^{x-y} + \cos(x+y) \end{aligned}$$

$$f_y(0, 0) = 2$$

$$f_{xx} = ye^{x-y} - \sin(x+y)$$

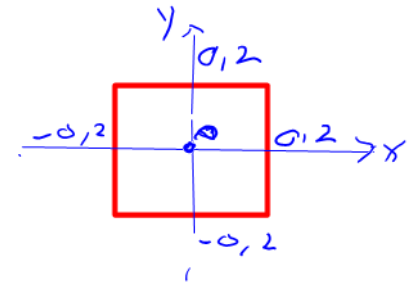
$$f_{xx}(0, 0) = 0$$

$$f_{xy} = (1-y)e^{x-y} - \sin(x+y)$$

$$f_{xy}(0, 0) = 1$$

$$f_{yy} = (y-2)e^{x-y} - \sin(x+y)$$

$$f_{yy}(0, 0) = -2$$



Vergleiche Seite 7:

$$T_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \underbrace{f(x_0, y_0)} + \binom{1}{0} f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + \binom{1}{1} f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \\ + \frac{1}{2!} \left[\binom{2}{0} f_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + \binom{2}{1} f_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) \right. \\ \left. + \binom{2}{2} f_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2 \right]$$

$$T_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \underbrace{f(0, 0)}_0 + \underbrace{f_x(0, 0)}_1(x - 0) + \underbrace{f_y(0, 0)}_2(y - 0)$$

$$\frac{1}{2!} \left[\underbrace{f_{xx}(0, 0)}_0(x - 0)^2 + \underbrace{2f_{xy}(0, 0)}_1(x - 0)(y - 0) + \underbrace{f_{yy}(0, 0)}_{-2}(y - 0)^2 \right]$$

$$= x + 2y + \frac{1}{2!} [2 \cdot 1 \cdot x \cdot y - 2y^2]$$

$$= \underline{\underline{x + 2y + xy - y^2}}$$

Für T_3 zusätzlich benötigt: alle dritten Ableitungen. Wir hatten schon

$$f_{xx} = ye^{x-y} - \sin(x+y), \quad f_{yx} = (1-y)e^{x-y} - \sin(x+y) \text{ und}$$

$$f_{yy} = (y-2)e^{x-y} - \sin(x+y)$$

Und rechnen

$$f_{xxx} = ye^{x-y} - \cos(x+y)$$

$$\rightarrow f_{xxy} = (1-y)e^{x-y} - \cos(x+y)$$

$$f_{xyy} = (y-2)e^{x-y} - \cos(x+y)$$

$$f_{yyy} = (-y+2+1)e^{x-y} - \cos(x+y)$$

$$f_{xxx}(0,0) = 0e^0 - \cos(0) = -1$$

$$f_{yxx}(0,0) = (1-0)e^0 - \cos(0) = 2$$

$$f_{yyx}(0,0) = -2e^0 - \cos(0) = -3$$

$$f_{yyy}(0,0) = (0+3)e^0 - \cos(0) = 2$$

Formeln aus Seiten 7 und 10:

$$T_3(x, y) = T_2(x, y) +$$

$$\frac{1}{3!} \left[\binom{3}{0} f_{xxx}(x_0, y_0) (x-x_0)^3 + \binom{3}{1} f_{xxy}(x_0, y_0) (x-x_0)^2 (y-y_0) \right.$$

$$\left. + \binom{3}{2} f_{xyy}(x_0, y_0) (x-x_0) (y-y_0)^2 + \binom{3}{3} f_{yyy}(x_0, y_0) (y-y_0)^3 \right]$$

$$= x + 2y + xy - y^2 + \frac{1}{2 \cdot 3} \left[-1x^3 + 3 \cdot (0) + 3(-3)xy^2 + 2y^3 \right]$$

Fehlerabschätzung für T_2

$$= x + 2y + xy - y^2 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{2}xy^2 + \frac{1}{3}y^3$$

$$f(\mathbf{x}) = T_2(\mathbf{x}; \mathbf{x}_0) + R_2(\mathbf{x}; \mathbf{x}_0).$$

$$|R_2(x, y)| = \frac{1}{3!} \sum_{k=0}^3 \binom{3}{k} \frac{\partial^{3-k}}{\partial x^{3-k}} \cdot \frac{\partial^k}{\partial y^k} f(\mathbf{x}_0 + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)) (x - x_0)^{3-k} (y - y_0)^k$$

Sieht kompliziert aus! Einfacher aber auch grober: $|a+b| \leq |a| + |b|$

Dreiecksungleichung:

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

$$\begin{aligned} |R_2(x, y)| &\leq \frac{1}{3!} \sum_{k=0}^3 \left| \binom{3}{k} \frac{\partial^{3-k}}{\partial x^{3-k}} \cdot \frac{\partial^k}{\partial y^k} f(\mathbf{x}_0 + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)) (x - x_0)^{3-k} (y - y_0)^k \right| \\ &= \frac{1}{3!} \sum_{k=0}^3 \left| \binom{3}{k} \right| \cdot \left| \frac{\partial^{3-k}}{\partial x^{3-k}} \cdot \frac{\partial^k}{\partial y^k} f(\mathbf{x}_0 + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)) \right| \cdot \left| (x - x_0)^{3-k} (y - y_0)^k \right| \\ &\leq \frac{1}{3!} \left(\sum_{k=0}^3 \binom{3}{k} \right) \max_{k, \theta} \left\{ \left| \frac{\partial^{3-k}}{\partial x^{3-k}} \cdot \frac{\partial^k}{\partial y^k} f(\mathbf{x}_0 + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)) \right| \right\} \cdot \|\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{x}}_0\|_\infty^3 \end{aligned}$$

3 Klammern

$\|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}\|_\infty = \max\{|x - x_0|, |y - y_0|\}$

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \implies \sum_{k=0}^3 \binom{3}{k} = \sum_{k=0}^3 \binom{3}{k} 1^k 1^{3-k} = (1 + 1)^3$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

Also

$$|R_2(\mathbf{x})| \leq \frac{1}{3!} \cdot 2^3 \cdot \max_{0 \leq k \leq 3, \theta \in [0,1]} \left\{ \left| \frac{\partial^{3-k}}{\partial x^{3-k}} \cdot \frac{\partial^k}{\partial y^k} f(\mathbf{x}_0 + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)) \right| \right\} \cdot \|\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{x}}_0\|_\infty^3$$

$\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right\|_\infty^3$

Finde $C :=$ gemeinsame obere Schranke für die Beträge **aller** Ableitungen der Ordnung 3 in **allen** Punkten $\mathbf{x} + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$, $\theta \in [0, 1]$

Dann gilt im \mathbb{R}^2 :

$$|R_2(x; x_0)| \leq \frac{2^3}{3!} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_\infty^3 \cdot C$$

Allgemeiner Fall:

$$|R_m(\mathbf{x}; \mathbf{x}_0)| \leq \frac{n^{m+1}}{(m+1)!} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_\infty^{m+1} C$$

n : Dimension des Raumes

m : Grad des Taylorpolynoms

$n = \text{Dimension des Raumes} \implies \exists n^{m+1}$ "verschiedene,, $(m + 1)$ -te Ableitungen

$C :=$ gemeinsame obere Schranke für die Beträge **aller** Ableitungen der Ordnung $m + 1$ in **allen** Punkten $\mathbf{x} + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$, $\theta \in [0, 1]$

Beachte: Fehlerabschätzung (fast) immer nur lokal möglich!

Fehler R_2 für unser Beispiel:

Wir hatten Taylorpolynom $T_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) = x + 2y + xy - y^2$ zweiten Grades für die Funktion

$$f(x, y) = \sin(x + y) + ye^{x-y}$$

zum Entwicklungspunkt $\mathbf{x}^0 = (0, 0)^T$. Gesucht: eine Abschätzung für das Restglied $|R_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0)|$ im Bereich $|x| \leq 0.2$ und $|y| \leq 0.2$.

Allgemeine Formel

$$|R_m(\mathbf{x}; \mathbf{x}_0)| \leq \frac{n^{m+1}}{(m+1)!} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_\infty^{m+1} C$$

$m = \text{Grad des Polynoms} = 2$

$n = \text{Dimension des Raumes} = 2$

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_\infty^{m+1} = \left(\frac{2}{10}\right)^{2+1}$$

$C :=$ gemeinsame obere Schranke für die Beträge **aller** Ableitungen der Ordnung $m + 1$ zwischen $(x_0, y_0)^T$ und $(x, y)^T$

Hier:

$$\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right\|_\infty$$

||
(0)

$$= \max \{ |x-0|, |y-0| \} = 0.2$$

$$|f_{xxx}| = |ye^{x-y} - \cos(x+y)| \leq |y \cdot e^{x-y}| + |\underbrace{\cos(x+y)}_{\leq 1}| \leq |y| \cdot e^{x-y} + 1$$

$$\leq 0.2 e^{0.2 - (-0.2)} + 1 = \frac{2}{10} e^{0.4} + 1$$

$$|f_{xxy}| = |(1-y)e^{x-y} - \cos(x+y)| \leq |(1-y) \cdot e^{x-y}| + |\cos(\dots)|$$

$$\leq |1-y| \cdot e^{x-y} + 1 \leq (1 - (-0.2)) e^{0.4} + 1 = 1.2 e^{0.4} + 1$$

$$|f_{xyy}| = |(y-2)e^{x-y} + \cos(x+y)| \leq |y-2| e^{x-y} + 1 \leq |y-2| e^{0.4} + 1 \leq |-0.2-2| e^{0.4} + 1 = 2.2 e^{0.4} + 1$$

$$|f_{yyy}| = |(-y+2+1)e^{x-y} - \cos(x+y)| \leq 3.2 e^{0.4} + 1$$

$|3-y| \leq |3 - (-0.2)| = 3.2$

Maximaler Betrag der dritten Ableitungen $\leq 3.2 e^{0.4} + 1 = \frac{32}{10} e^{0.5} + 1$

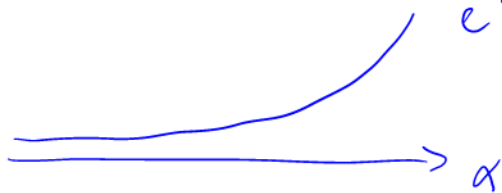
$\| \sqrt{e} < \sqrt{4} \|$

$$< \frac{32}{10} \cdot \sqrt{4} + 1 = \frac{64}{10} + \frac{10}{10} = \frac{74}{10} =$$

Und mit $|R_m(x; x_0)| \leq \frac{n^{m+1}}{(m+1)!} \|x - x_0\|_\infty^{m+1} C$

$$|R_2(x, x_0)| \leq \frac{2^3}{3!} \cdot C \|x - x_0\|_\infty^3 \leq \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 3} \cdot \frac{74}{10} \cdot \left(\frac{2}{10}\right)^3$$

$$< \frac{4 \cdot 8}{10^4} \cdot \frac{75}{3} = \frac{4 \cdot 8 \cdot 25}{100 \cdot 100} = \frac{8}{100}$$



$$x-y \leq 0.2 - y \leq 0.2 - (-0.2)$$

Beispiel B: (Zur HA2)

$$g(x, y) = \underbrace{ye^{x-y}}_{f(x,y) \text{ aus Bsp A}} + \underbrace{\sin(x+y)}_{\text{neu}} + 2x^2 - 3x + 4y.$$

a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades T_2 von g zum Entwicklungspunkt $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

b) Zeigen Sie, dass für alle $(x, y) \in D := [-0.2, 0.2] \times [-0.2, 0.2]$ gilt:

$$\underline{\underline{|g(x, y) - T_2(x, y)| \leq \frac{1}{10} .}}$$

Lösung: $g(x, y) = \underbrace{ye^{x-y}} + \underbrace{\sin(x+y)} + 2x^2 - 3x + 4y.$

Alternative zur Ableitungsberechnung: Potenzreihen:

$$\underline{\underline{e^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} = \frac{\alpha^0}{0!} + \frac{\alpha^1}{1!} + \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^3}{3!} + \dots}}$$

$$\sin(\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\alpha^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{\alpha^1}{1!} - \frac{\alpha^3}{3!} \pm \dots$$

$$\alpha = x-y$$

$$ye^{x-y} = y \left[\underbrace{(x-y)^0}_1 + (x-y)^1 + \frac{(x-y)^2}{2} + \dots \right]$$

$$= y + xy - y^2 + y \cdot \frac{x^2 - 2xy + y^2}{2} + \dots$$

Terme mit grad ≥ 3

$$\sin(x+y) =$$

$$\alpha = x+y$$

$$\sin(x+y) = (x+y) - \frac{(x+y)^3}{3!} + \dots$$

$$g(x, y) = ye^{x-y} + \sin(x+y) + \underbrace{2x^2 - 3x + 4y}_{\text{wird exakt wiedergegeben}}$$

$$T_2(x, y) = \underbrace{y + xy - y^2}_{\text{wie in Bsp A}} + x + y + 2x^2 - 3x + 4y$$

$$= \underbrace{x + 2y + xy - y^2}_{\text{wie in Bsp A}} + 2x^2 - 3x + 4y$$

Für die Fehlerabschätzung brauchen wir eine obere Schranke für die Beträge aller dritten Ableitungen von g .

dritte Ableitungen von $g =$ dritte Ableitungen von $ye^{x-y} +$ dritte Ableitungen von $\sin(x+y)$

Fehlerabschätzung: $g(x, y) = ye^{x-y} + \sin(x+y) + 2x^2 - 3x + 4y$

dritte Ableitungen:
 $= -\cos(x+y)$

dritte Ableitungen = 0

$| \text{dritte Ableitungen von } g | \leq | \text{dritte Ableitung von } ye^{x-y} | + | -\cos(x+y) |$

≤ 1

Für die dritte Ableitungen von $h(x, y) = ye^{x-y}$ rechnen wir (vgl. Seite 15)

$h(x, y) = h_x(x, y) = h_{xx}(x, y) = h_{xxx}(x, y) = ye^{x-y}$

$|h_{xxx}| \leq 0.2 e^{0.2 - (-0.2)}$

$h_y(x, y) = h_{xy}(x, y) = h_{xxy}(x, y) = (1-y)e^{x-y}$

$|h_{xxy}| \leq |1 - (-0.2)| e^{0.4} = 1.2 e^{0.4}$

$h_{yy}(x, y) = h_{xyy}(x, y) = (y-2)e^{x-y}$

$|h_{xyy}| \leq |(-0.2 - 2)| e^{0.2 - (0.2)} + 1 = 2.2 e^{0.4}$

$|h_{yyy}(x, y)| = |(3-y)e^{x-y}| \leq |3.2 \cdot e^{0.4}|$

$|3. \text{ Ableitungen von } h| \leq (3.2)(2)$ wie in Bsp A. $|3. \text{ Abl. von } g| \leq 6.4 + 1$

$|g(x, y) - T_2(x, y)| \leq \frac{n^{m+1}}{(m+1)!} \|x - x_0\|_\infty^{m+1} C = \frac{2^3}{3!} \cdot C \|x - x_0\|_\infty^3 \leq$

$\frac{8}{6} \cdot \frac{74}{10} \cdot \left(\frac{2}{10}\right)^3$

$< \frac{8}{100}$ wie in Bsp A 23

Anderer Entwicklungspunkt und \mathbb{R}^3 :

Beispiel C: Gesucht Taylorpolynom zweiten Grades von

$$f(x, y, z) = \sin(x + y) + xe^{z-y} - z^2 + y \quad \mathbf{x_0 = \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)}.$$

$$f(x, y, z) = \sin(x + y) + xe^{z-y} - z^2 + y,$$

$$f_x(x, y, z) = \cos(x + y) + e^{z-y},$$

$$f_y(x, y, z) = \cos(x + y) - xe^{z-y} + 1,$$

$$f_z(x, y, z) = xe^{z-y} - 2z,$$

$$f_{xx}(x, y, z) = -\sin(x + y),$$

$$f_{xy}(x, y, z) = -\sin(x + y) - e^{z-y},$$

$$f_{xz}(x, y, z) = e^{z-y},$$

$$f_{yy}(x, y, z) = -\sin(x + y) + xe^{z-y},$$

$$f_{yz}(x, y, z) = -xe^{z-y},$$

$$f_{zz}(x, y, z) = xe^{z-y} - 2,$$

im Punkt $(x_0, y_0, z_0)^T$

$$f\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \sin(0) - \frac{\pi}{4}e^0 - \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{\pi}{4}$$

$$f_x\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) = \cos(0) + e^0 = 2$$

$$f_y\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) = 2 + \frac{\pi}{4}$$

$$f_z\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{3\pi}{4}$$

$$f_{xx}\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$f_{xy}\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) = -1$$

$$f_{xz}\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$f_{yy}\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{4}$$

$$f_{yz}\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$f_{zz}\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{4} - 2$$

Formeln aus Seite 8:

$$\begin{aligned} T_2(x, y, z) &= f(x_0, y_0, z_0) + f_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) \\ &+ f_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) \\ &+ \frac{1}{2!} \left[f_{xx}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0)^2 + 2 \cdot f_{xy}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0)(y - y_0) \right. \\ &+ 2 \cdot f_{xz}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0)(z - z_0) + f_{yy}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0)^2 \\ &\left. + 2 \cdot f_{yz}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0)(z - z_0) + f_{zz}(x_0, y_0, z_0)(z - z_0)^2 \right] \end{aligned}$$

$$x_0 = -\frac{\pi}{4}, y_0 = \frac{\pi}{4}, z_0 = \frac{\pi}{4}$$

einsetzen

$$\begin{aligned}
T_2(x, y, z) &= f\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) + f_x\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \\
&+ f_y\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)\left(y - \frac{\pi}{4}\right) + f_z\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)\left(z - \frac{\pi}{4}\right) \\
&+ \frac{1}{2} \left[f_{xx}\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + 2 \cdot f_{xy}\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\left(y - \frac{\pi}{4}\right) \right. \\
&+ 2 \cdot f_{xz}\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\left(z - \frac{\pi}{4}\right) + f_{yy}\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)\left(y - \frac{\pi}{4}\right)^2 \\
&+ \left. 2 \cdot f_{yz}\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)\left(y - \frac{\pi}{4}\right)\left(z - \frac{\pi}{4}\right) + f_{zz}\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)\left(z - \frac{\pi}{4}\right)^2 \right] \\
&=
\end{aligned}$$

Ableitungswerte einsetzen:

$$\begin{aligned}
T_2(x, y, z) &= \underbrace{f\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)}_{-\left(\frac{\pi}{4}\right)^2} + \underbrace{f_x\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)}_2 \left(x - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) \\
&+ \underbrace{f_y\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)}_{2+\frac{\pi}{4}} \left(y - \frac{\pi}{4}\right) + \underbrace{f_z\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)}_{-\frac{3\pi}{4}} \left(z - \frac{\pi}{4}\right) \\
&+ \frac{1}{2} \left[\underbrace{f_{xx}\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)}_0 \left(x - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)^2 + 2 \cdot \underbrace{f_{xy}\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)}_{-1} \left(x - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) \left(y - \frac{\pi}{4}\right) \right. \\
&+ 2 \cdot \underbrace{f_{xz}\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)}_1 \left(x - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) \left(z - \frac{\pi}{4}\right) + \underbrace{f_{yy}\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)}_{-\frac{\pi}{4}} \left(y - \frac{\pi}{4}\right)^2 \\
&\left. + 2 \cdot \underbrace{f_{yz}\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)}_{\frac{\pi}{4}} \left(y - \frac{\pi}{4}\right) \left(z - \frac{\pi}{4}\right) + \underbrace{f_{zz}\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)}_{-\frac{\pi}{4}-2} \left(z - \frac{\pi}{4}\right)^2 \right]
\end{aligned}$$

Zusammenfassen:

$$\begin{aligned}T_2(x, y, z) &= -\frac{\pi^2}{16} + 2\left(x - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) + \left(2 + \frac{\pi}{4}\right)\left(y - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{3\pi}{4}\left(z - \frac{\pi}{4}\right) \\ &+ \frac{1}{2} \left[-2 \cdot \left(x - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\left(y - \frac{\pi}{4}\right) + 2\left(x - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\left(z - \frac{\pi}{4}\right) \right. \\ &- \frac{\pi}{4}\left(y - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{\pi}{2}\left(y - \frac{\pi}{4}\right)\left(z - \frac{\pi}{4}\right) \\ &\left. + \left(-\frac{\pi}{4} - 2\right)\left(z - \frac{\pi}{4}\right)^2 \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}T_2(x, y, z) &= -\frac{\pi^2}{16} + 2\left(x - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) + \left(2 + \frac{\pi}{4}\right)\left(y - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{3\pi}{4}\left(z - \frac{\pi}{4}\right) \\ &- \left(x - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\left(y - \frac{\pi}{4}\right) + \left(x - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\left(z - \frac{\pi}{4}\right) \\ &- \frac{\pi}{8}\left(y - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{\pi}{4}\left(y - \frac{\pi}{4}\right)\left(z - \frac{\pi}{4}\right) + \left(-\frac{\pi}{8} - 1\right)\left(z - \frac{\pi}{4}\right)^2\end{aligned}$$

fertig!

Fehlerabschätzung für $f(x, y, z) - T_2(x, y, z)$ für $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_\infty \leq \frac{1}{10}$ also

$$x \in \left[-\frac{\pi}{4} - \frac{1}{10}, -\frac{\pi}{4} + \frac{1}{10}\right], \quad y \in \left[\frac{\pi}{4} - \frac{1}{10}, \frac{\pi}{4} + \frac{1}{10}\right], \quad z \in \left[\frac{\pi}{4} - \frac{1}{10}, \frac{\pi}{4} + \frac{1}{10}\right].$$

Wir benötigen alle dritten Ableitungen

$$f_{xx}(x, y, z) = -\sin(x + y), \quad f_{xy}(x, y, z) = -\sin(x + y) - e^{z-y},$$

$$f_{xz}(x, y, z) = e^{z-y}, \quad f_{yy}(x, y, z) = -\sin(x + y) + xe^{z-y}$$

$$f_{yz}(x, y, z) = -xe^{z-y}, \quad f_{zz}(x, y, z) = xe^{z-y} - 2,$$

$$f_{xxx} = -\cos(x + y),$$

$$f_{xxy} = -\cos(x + y),$$

$$f_{xxz} = 0,$$

$$f_{xyy} = -\cos(x + y) + e^{z-y},$$

$$|f_{xyy}| \leq |-\cos(x + y)| + |e^{z-y}|,$$

$$f_{xyz} = -e^{z-y},$$

$$f_{xzz} = e^{z-y},$$

$$f_{yyy} = -\cos(x + y) - xe^{z-y},$$

$$|f_{yyy}| \leq |-\cos(x + y)| + |xe^{z-y}|, \\ \leq 1 + |x| \cdot |e^{z-y}| <$$

$$f_{yyz} = xe^{z-y},$$

$$f_{zzy} = -xe^{z-y},$$

$$f_{zzz} = xe^{z-y},$$

$$|f_{xxx}| \leq 1,$$

$$|f_{xxy}| \leq 1,$$

$$|f_{xxz}| = 0,$$

$$|f_{xyy}| \leq 1 + e^{\frac{\pi}{4} + \frac{1}{10} - (\frac{\pi}{4} - \frac{1}{10})} = 1 + e^{0.2}$$

$$|f_{xyz}| \leq e^{\frac{\pi}{4} + \frac{1}{10} - (\frac{\pi}{4} - \frac{1}{10})} = e^{0.2}$$

$$|f_{xzz}| \leq e^{\frac{2}{10}},$$

$$|f_{yyy}| \leq 1 + \overbrace{(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{10})}^{< 1} e^{0.2} < 1 + e^{0.2}$$

$$|f_{yyz}| \leq (\frac{\pi}{4} + \frac{1}{10}) e^{0.2} < e^{0.2}$$

$$|f_{yzz}| \leq // //$$

$$|f_{zzz}| \leq // //$$

Die Beträge aller dritten Ableitungen sind beschränkt durch

$$0 \leq 1 + e^{\frac{2}{10}} < 1 + \sqrt{e} < 1 + 2$$

Eine gemeinsame obere Schranke für die Beträge der dritten Ableitungen ist also zum Beispiel $C := 3$

Als Schranke für den Fehler erhält man

$$|R_m(\mathbf{x}; \mathbf{x}_0)| \leq \frac{n^{m+1}}{(m+1)!} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_\infty^{m+1} C$$

Mit $n = 3$, $m = 2$

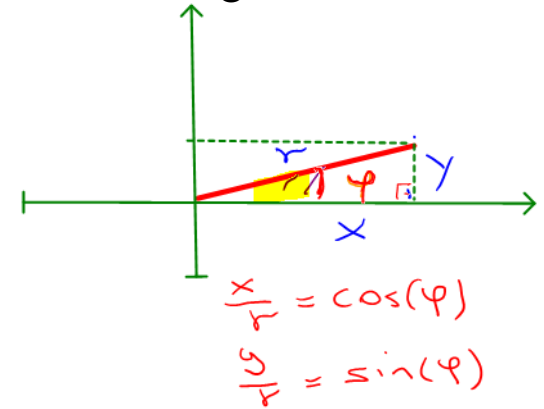
$$|R_2(x, y, z)| \leq \frac{3^3}{3!} \cdot C \cdot \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_\infty^3 \leq \frac{27}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 3 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^3 < \frac{27}{2000} = 0.0135.$$

Polar-, Kugel-, Zylinderkoordinaten

Später: Beschreibe die Teilmengen des \mathbb{R}^2 bzw. \mathbb{R}^3 möglichst einfach durch Angabe von Grenzen für die Koordinaten.

Beispiel 1: $M_1 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq \overbrace{x^2 + y^2}^{r^2} \leq 4 \right\}$

$1 \leq r \leq 2$



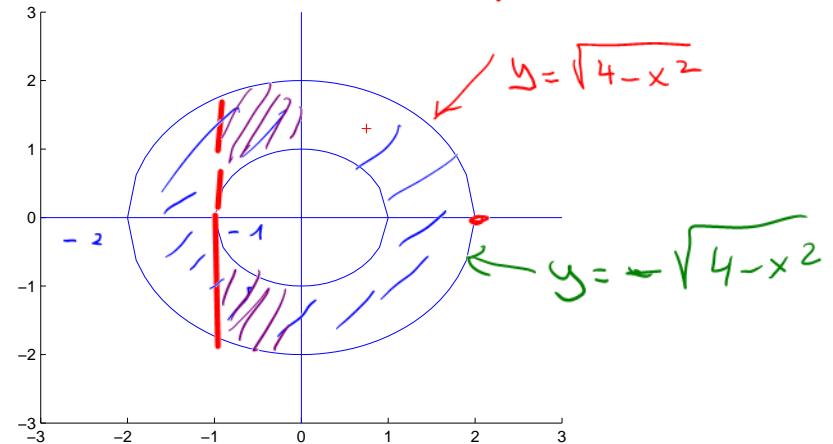
Geometrisch: Kreisring

$x \in [-2, -1]$

$y \in [-\sqrt{4-x^2}, \sqrt{4-x^2}]$

denn auf dem Rand

$y^2 = 4 - x^2$



Beschreibung in kartesischen Koordinaten

Einfacher als Kartesisch : **Polarkoordinaten** $x = r \cos(\phi)$, $y = r \sin(\phi)$ gilt:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi(\mathbf{u}) = \Phi \begin{pmatrix} r \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(\phi) \\ r \sin(\phi) \end{pmatrix},$$

$\frac{x}{r} = \cos(\phi) \rightarrow x = r \cos(\phi)$

$\frac{y}{r} = \sin(\phi) \rightarrow y = r \sin(\phi)$

$1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \rightarrow 1 \leq r \leq 2$

$0 \leq \phi \leq 2\pi$ 32

M_1 :

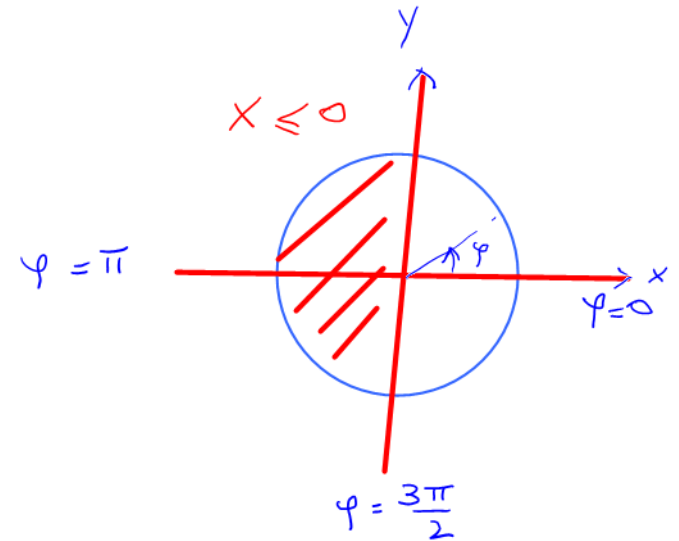
Das Gebiet ist viel einfacher.

Beispiel 2 Später z.B. integrieren von $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$ über den halben Kreisring

$$M_2 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : 4 \leq \overbrace{x^2 + y^2}^{r^2} \leq 9, \quad \underline{x \leq 0} \right\}$$

$2 \leq r \leq 3$

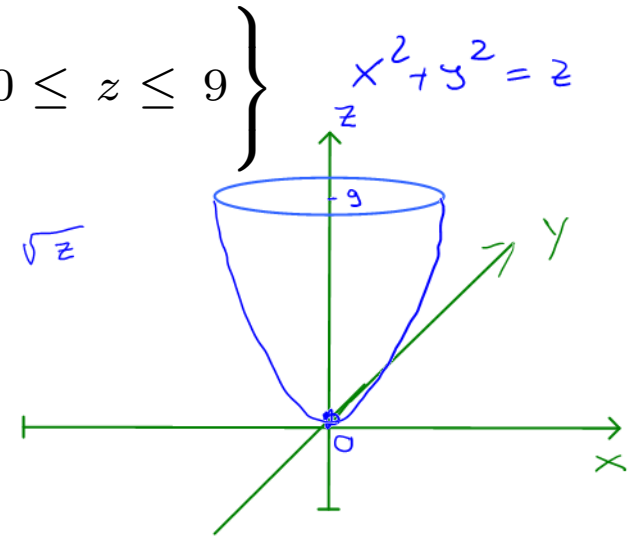
$$r \in [2, 3] \quad \phi \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right]$$



Beispiel 3: $M_3 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \underbrace{x^2 + y^2}_{0 \leq r^2 \leq z} \leq z, 0 \leq z \leq 9 \right\}$

Zylinderkoordinaten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi(\mathbf{u}) = \Phi \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \\ r \sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}$$



Für x-y
wie oben
Polarkoordinaten
 $0 \leq \varphi \leq 2\pi$
 $0 \leq r \leq \sqrt{z}$

Rand $\partial M_3 = 2$ Teilflächen:

Deckel: Höhe = 9 = z $\rightarrow \sqrt{z} = 3$

Kreisscheibe:

$$\begin{aligned} x &= r \cos(\varphi) & 0 \leq r \leq 3 \\ y &= r \sin(\varphi) & 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ z &= 9 \end{aligned}$$

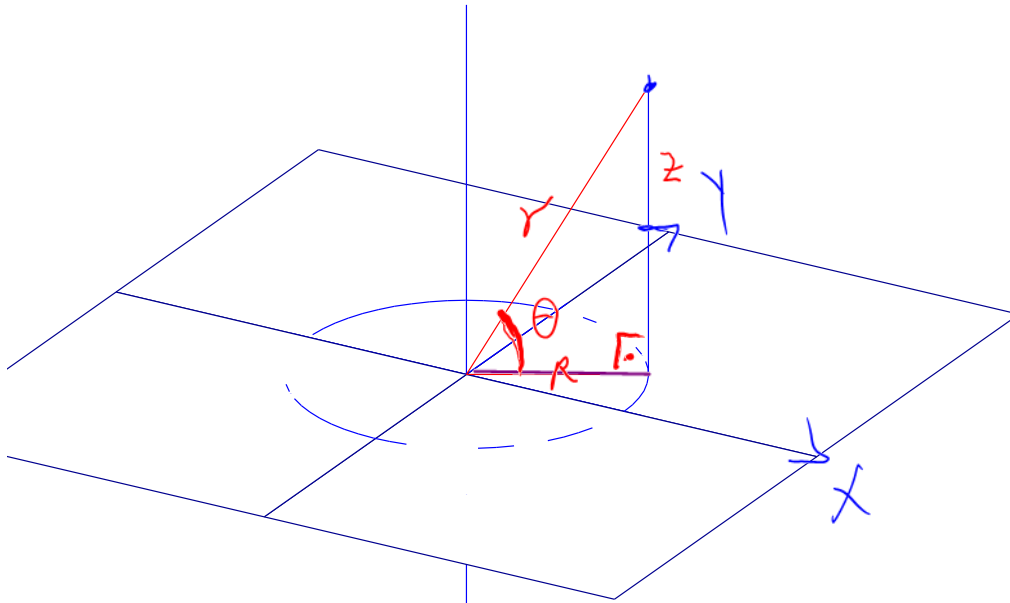
Mantel:

Auf jeder Höhe maximaler Radius

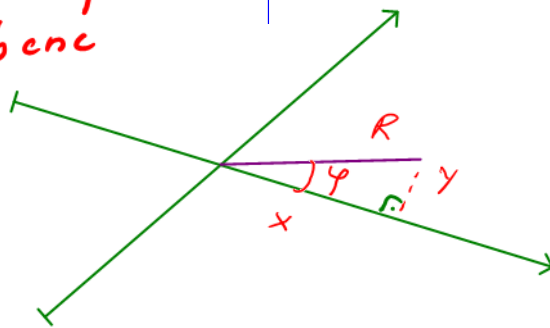
$$\begin{aligned} 0 &\leq z \leq 9 \\ r &= \sqrt{z} \\ 0 &\leq \varphi \leq 2\pi \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{z} \cos(\varphi) \\ \sqrt{z} \sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}$$

Kugelkoordinaten $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi(\mathbf{u}) = \Phi \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \cos(\theta) \\ r \sin(\varphi) \cos(\theta) \\ r \sin(\theta) \end{pmatrix}$



Projektion auf die
x-y-Ebene



$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$z = r \sin(\theta)$$

$$R = r \cos(\theta)$$

wie bei Polar-Koordinat.

$$\begin{cases} x = R \cos(\varphi) = r \cos(\theta) \cos(\varphi) \\ y = R \sin(\varphi) = r \cos(\theta) \sin(\varphi) \end{cases}$$

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad \text{wie gehabt}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$r \in \mathbb{R}^+$$

Beispiel 4:

$$M_4 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{x^2 + y^2 + z^2}_{\substack{r^2 \\ 0 \leq r \leq 2}} \leq 4 \right\}. \quad \text{Kugel}$$

Kugelkoordinaten:

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{pmatrix} x(r, \varphi, \theta) \\ y(r, \varphi, \theta) \\ z(r, \varphi, \theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \cos(\theta) \\ r \sin(\varphi) \cos(\theta) \\ r \sin(\theta) \end{pmatrix}$$

M_4 :

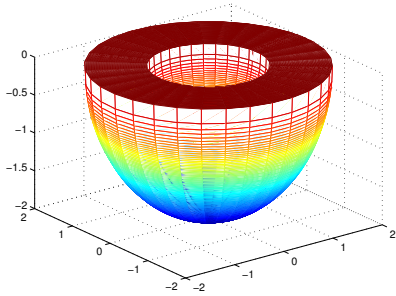
$$M_5 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4}_{1 \leq r \leq 2} \right\}.$$

$$M_6 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 4 \leq \overbrace{x^2 + y^2 + z^2}^{r^2} \leq 25, \underline{z \leq 0} \right\}.$$

$$2 \leq r \leq 5$$

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

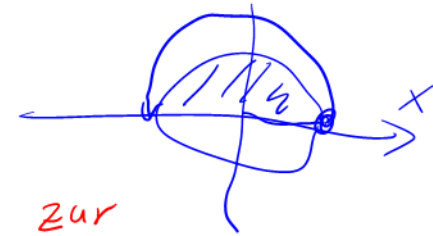
$$\hookrightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq 0$$



$$M_7 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 25, \underline{y \geq 0} \right\}.$$

$$2 \leq r \leq 5$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$



führt zur
Einschränkung im φ -Bereich

