Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. I. Gasser

WiSe 2024/2025

Klausur zur Mathematik III, Version A
(Modul: Analysis III)

04. März 2025

Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein. Diese Eintragungen werden auf Datenträgern gespeichert.

Name:																
Vorname:																
Matr.-Nr.:																

Stg:	AIW	BU	CBI BV	ET	EUT GT	IN IIW	LUM WLUM	MB	MTB MEC	SB	VT	

Ich bin darüber belehrt worden, dass die von mir zu erbringende Prüfungsleistung nur dann bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

Unterschrift:

Aufg.	Punkte	Korrekteur
1		
2		
3		
4		

$\sum$ =

Aufgabe 1: (7 Punkte)

Bestimmen Sie und klassifizieren Sie alle lokalen Extrema von $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) \;=\; 8x - \frac{9}{2}y$$

unter der Nebenbedingung

$$g(x,y) = \; 16x^2 + 9y^2 \; - 25 \; = \; 0$$

mit Hilfe der Lagrangeschen Multiplikatoren-Regel. Überprüfen Sie zunächst die Regularitätsbedingung.

Lösung:

Regularitätsbedingung:

$\operatorname{grad} g(x,y) = \binom{32x}{18y} \; = \; \binom{0}{0} \iff \binom{x}{y} \; = \; \binom{0}{0}$

$\binom{0}{0}$ ist nicht zulässig. Die Regularitätsbedingung ist auf der zulässigen Menge erfüllt. **[1 Punkt]**

Eine notwendige Bedingung für (lokale) Optimalität lautet daher:

$\operatorname{grad} F(x,y) = \operatorname{grad}\,(f(x,y) + \lambda g(x,y)) = \; \mathbf{0}\,.$

Wir erhalten das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} f_x + \lambda g_x \; &= 8 + \; \lambda \cdot 32x \; = \; 0, \qquad\qquad (\Longrightarrow \lambda \neq 0) \\ f_y + \lambda g_y \; &= \; -\frac{9}{2} + \; \lambda \cdot 18y \; = \; 0 \\ g(x,y) &= 16x^2 + 9y^2 - 25 = 0\,. \end{aligned}$$

[1 Punkt]

Gleichungssystem lösen: Es gilt $\lambda \neq 0$

I : $\quad 8 + 2 \cdot 16\lambda x = 0 \Longrightarrow x = -\frac{1}{4\lambda}$

II : $\quad -\frac{9}{2} + 2 \cdot 9\lambda y = 0 \Longrightarrow y = \frac{1}{4\lambda}\,.$

Also $y = -x$. Dies eingesetzt in die dritte Bedingung liefert

$g(x,x) = 16x^2 + 9x^2 - \; 25 \overset{!}{=} \; 0 \Longrightarrow x^2 = 1\,.$

Wir erhalten also zwei Kandidaten für lokale Extrema:

$$P_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\;, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\;.$$

Berechnung der Kandidaten : **(3 Punkte)**

Klassifikation [**2 Punkte**]

Der Rand einer Ellipse ist abgeschlossen und beschränkt, daher genügt bei zwei Kandidaten der Vergleich der Funktionswerte.

$f(-1,1) = \; -8 - \frac{9}{2} = \; -\frac{25}{2}, \qquad f(1,-1) = \; 8 + \frac{9}{2} \; = \; \frac{25}{2}.$

In P_1 liegt ein (das globale) Minimum und in P_2 ein (das globale) Maximum.

Alternativ berechnet man die Hessematrix

$$\boldsymbol{H}\ \boldsymbol{F}\,(x,y) = \begin{pmatrix} 32\lambda & 0 \\ 0 & 18\lambda \end{pmatrix}$$

Für P_1 gilt $\lambda_1 = \frac{1}{4}$ also

$$\boldsymbol{H}\ \boldsymbol{F}\,(-1,-1) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & \frac{9}{2} \end{pmatrix} \qquad \text{(psitiv definit)}$$

Hier liegt ein Minimum vor.

Für P_2 gilt $\lambda_2 = -\frac{1}{4}$ also

$$\boldsymbol{H}\ \boldsymbol{F}\,(1,1) = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -\frac{9}{2} \end{pmatrix} \qquad \text{(negativ definit)}$$

Hier liegt ein Maximum vor.

Aufgabe 2: (4 Punkte)

Gegeben sei der halbe Kreisring

$$D := \Big\{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2;\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9,\ y \geq 0\Big\}$$

mit der Massendichte $\rho(x,y) = 3 - y$.

Berechnen Sie die Masse m von D.

Lösung:

Wir gehen über zu Polarkoordinaten

$x = r\cos(\phi),\ y = r\sin(\phi),\ r \in [1,3],\ \phi \in [0,\pi]$ **(1 Punkt)**

und erhalten für die Masse m

$$\begin{aligned}
M =& \int_1^3 \int_0^\pi \rho(x(r,\phi), y(r,\phi))\, r\, d\phi dr \\
=& \int_1^3 \int_0^\pi (3 - \ r\sin(\phi))\ r\ d\phi dr \qquad (\textbf{1Punkt}) \\
=& \int_1^3 \Big[3r\phi + \ r^2\cos(\phi)\Big]_0^\pi \ dr \ = \ \int_1^3 \Big(3r(\pi - 0) + \ r^2(-1-1)\Big)\ dr \\
=& 3\pi \left[\frac{r^2}{2}\right]_1^3 - \left[\frac{2r^3}{3}\right]_1^3 = \frac{3\pi}{2}(9-1) - \left(\frac{2}{3}(27-1)\right) \qquad \textbf{(2 Punkte)} \\
=& 12\pi - \frac{52}{3}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 3: (5 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass die Funktion $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$g(x,y,z) = (x + \frac{1}{2}yz\,,\ -y+z\,,\ -y)$$

kein Potential besitzt.

b) Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_c g(x,y,z)d(x,y,z)$$

entlang der Kurve

$$c(t) = \begin{pmatrix} t \\ \sin(\frac{t}{2}) \\ \cos(\frac{t}{2}) \end{pmatrix} \qquad c\ :\ [0\,,\,\pi] \to \mathbb{R}^3.$$

Lösung

a) Es gilt zum Beispiel
$(g_1)_z \neq 0 = (g_3)_x$
es gibt also kein Potential zu g. **(1 Punkt)**

b) **(4 Punkte)** $\dot{\boldsymbol{c}}\,(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}\cos(\frac{t}{2}) \\ -\frac{1}{2}\sin(\frac{t}{2}) \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{g}\,(\,\boldsymbol{c}\,(t)) = \begin{pmatrix} t + \frac{1}{2}\sin(\frac{t}{2})\cos(\frac{t}{2}) \\ -\sin(\frac{t}{2}) + \cos(\frac{t}{2}) \\ -\sin(\frac{t}{2}) \end{pmatrix}.$

$$\begin{aligned} < g(\boldsymbol{c}(t)), \dot{\boldsymbol{c}}(t) > &= t + \frac{1}{2}\sin(\frac{t}{2})\cos(\frac{t}{2}) \\ &+ \frac{1}{2}\cos(\frac{t}{2})\left(-\sin(\frac{t}{2}) + \cos(\frac{t}{2})\right) \\ &- \frac{1}{2}\sin(\frac{t}{2})\left(-\sin(\frac{t}{2})\right) = t + \frac{1}{2}\left(\cos^2(\frac{t}{2}) + \sin^2(\frac{t}{2})\right) \\ &= t + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\boldsymbol{c}} g(x,y,z)d(x,y,z) &= \int_0^\pi < g(\boldsymbol{c}(t)), \dot{\boldsymbol{c}}(t) > dt \\ &= \int_0^\pi t + \frac{1}{2}\,dt = \\ &= \frac{t^2}{2} + \frac{t}{2}\bigg|_0^\pi = \frac{\pi^2+\pi}{2}\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 4: (1+3 Punkte)

Gegeben sei das Vektorfeld

$$\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \boldsymbol{f}(x,y) = \begin{pmatrix} xy + \tan(e^{-x^2}) \\ x^2 - \cos(e^{-y^2}) \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Rotation $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{f}(x,y)$.

b) ∂D bezeichne den mathematisch positiv orientierten Rand des Dreiecks

$$D := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 2 - x \right\}.$$

Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int_{\partial D} \boldsymbol{f}(x,y)\, d(x,y)$.

Lösung:

a)

$$\mathrm{rot}\ \boldsymbol{f}(x,y) = (f_2)_x - (f_1)_y = 2x - x = x. \qquad \textbf{(1 Punkt)}$$

b) Nach dem Greenschen Satz gilt:

$$I := \int_{\partial D} \boldsymbol{f}(x,y)\, d(x,y) = \int_D \mathrm{rot} f(x,y)\, d(x,y) \qquad \textbf{(Ansatz: 1 Punkt)}$$

Also

$$I = \int_0^2 \int_0^{2-x} x\, dy\, dx = \int_0^2 x\, [y]_0^{2-x}\, dx \qquad \textbf{(1 Punkt)}$$

$$= \int_0^2 (2x - x^2)\, dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}. \qquad \textbf{(1 Punkt)}$$