Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. I. Gasser

SoSe 2025

Klausur zur Mathematik III
(Modul: Analysis III)

27. August 2025

Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein. Diese Eintragungen werden auf Datenträgern gespeichert.

Name:																
Vorname:																
Matr.-Nr.:																

Stg:	AIW	BU	CBI BV	ET	EUT GT	IN IIW	LUM WLUM	MB	MTB MEC	SB	VT	

Ich bin darüber belehrt worden, dass die von mir zu erbringende Prüfungsleistung nur dann bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

Unterschrift:

Aufg.	**Punkte**	**Korrekteur**
1		
2		
3		

$\sum =$

Aufgabe 1: (4 Punkte)

Bestimmen und klassifizieren Sie das lokale Extremum der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\boldsymbol{f}(x,y) := x^2 - 4xy + 36y^2 - 10x - 12y\,.$$

Lösung:

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 2x - 4y - 10 = 0 \iff x = 2y + 5. \\ f_y(x,y) &= -4x + 72y - 12 = -8y - 20 + 72y - 12 = 0 \iff 64y = 32 \\ &\iff y = \frac{1}{2} \implies x = 6. \qquad \textbf{[2 Punkte]} \end{aligned}$$

Als Hessematrix erhalten wir $H(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 72 \end{pmatrix}$. **[1 Punkt]**

Die Hessematrix ist positiv definit, denn

$H_{11} = 2 > 0$ und $\det(H) = 144 - 16 > 0\,.$

Alternativ:

$(2-\lambda)(72-\lambda) - 16 = 0 \iff \lambda^2 - 74\lambda + 144 - 16 = \lambda^2 - 74\lambda + 128$

liefert die positiven Nullstellen

$\lambda_{1,2} = 37 \pm \underbrace{\sqrt{37^2 - 128}}_{<37} > 0.$

Also liegt ein Minimum vor. **[1 Punkt]**

Aufgabe 2:

a) Bestimmen Sie ein Potential für die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$\boldsymbol{f}\,(x,y,z) \;=\; (2xy^2\,,\; z+2yx^2\,,\; y)^T.$$

b) Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{f}\,(x,y,z)d(x,y,z)$$

entlang der Kurve

$$\boldsymbol{c}\,(t) \;=\; \begin{pmatrix} t+1 \\ t^2+2 \\ t^3 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{c} \;:\; [0\,,\,1] \to \mathbb{R}^3.$$

Lösung

a) Sei Φ ein Potential für f. Dann gilt

$$\Phi_x \;=\; 2xy^2\,, \quad \Phi_y \;=\; z+2yx^2\,, \quad \Phi_z \;=\; y.$$

$$\Phi_x \;=\; 2xy^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \Phi(x,y,z) \;=\; x^2y^2 \;+\; c(y,z)$$

$$\Phi_y \;=\; 2yx^2 \;+\; c_y(y,z) \stackrel{!}{=} z+2yx^2 \quad \Longleftrightarrow \quad c_y(y,z) \;=\; z$$

$$\Longleftrightarrow c(y,z) \;=\; yz \;+\; d(z) \Longrightarrow \Phi(x,y,z) \;=\; x^2y^2 \;+\; yz+d(z)$$

$$\Phi_z \;=\; y+d'(z) \stackrel{!}{=} y \Longrightarrow d'(z)=0 \Longrightarrow d=Konst.$$

Also haben wir mit $\Phi(x,y,z) \;=\; x^2y^2 \;+\; yz$ ein Potential für f gefunden.

b) Es gilt $\boldsymbol{c}\,(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c}\,(1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

und damit $\Phi(\,\boldsymbol{c}\,(0)) = \;4\,,$

$\Phi(\,\boldsymbol{c}\,(1)) = \;2^2 \cdot 3^2 + 3 = \;39\,.$

Für das Kurvenintegral erhalten wir also

$$\begin{aligned}\int_{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{f}(x,y,z)d(x,y,z) \;&=\; \Phi(\boldsymbol{c}(1)) \;-\; \Phi(\boldsymbol{c}(0)) \\ &=\; 39-4 = \;35.\end{aligned}$$

Aufgabe 3) (5+1+3+1 Punkte)

Gegeben sei die halbe Kugel $K := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;:\; x^2 + y^2 + z^2 \;\leq\; 25\,,\;\; z \;\geq\; 0 \right\}$

und das Vektorfeld $\boldsymbol{f}\,(x,y,z) \;=\; \begin{pmatrix} z^2 \;+\; x^2 \\ x^2 \;+\; y \\ 2z+1 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int_K \operatorname{div}\; \boldsymbol{f}\,(x,y,z)\, d(x,y,z)\,.$

Hinweis: Je nach dem in welcher Reihenfolge der Variablen Sie integrieren, **könnte** folgendes nützlich sein:

$$2\cos^2(\alpha) = \cos(2\alpha) + 1.$$

b) Der Körper K wird berandet durch ein ebenes Flächenstück B und ein nicht ebenes Flächenstück M. Geben Sie eine Parametrisierung für das ebene Flächenstück B an.

c) Berechnen Sie den Fluss von $\boldsymbol{f}$ durch das ebene Flächenstück B.

d) Wie groß ist nach den Teilen a) und c) der Fluss von $\boldsymbol{f}$ durch das nicht ebene Flächenstück M.

Lösung:

a) $\operatorname{div}\;\boldsymbol{f}\,(x,y,z) = 2x+1+2 \;=\; 2x+3\,.$ **(1 Punkt)**

Zur Berechnung des Integrals nutzen wir Kugelkoordinaten und erhalten mit

$x = r\cos(\phi)\cos(\theta)\,,\quad y = r\sin(\phi)\cos(\theta)\,,\quad z = r\sin(\theta)\,,$
$0 \leq r \leq 5,\; 0 \leq \phi \leq 2\pi,\; 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\,.$ **(1 Punkt)**

$$\begin{aligned}
&\int_K \operatorname{div} \boldsymbol{f}(x,y,z)\, d(x,y,z) \\
&\quad = \int_0^5 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} (2r\cos(\phi)\cos(\theta)+3)\cdot r^2\cos(\theta)\, d\phi\, d\theta\, dr \qquad \textbf{(1 Punkt)} \\
&\quad = \int_0^5 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big[2r^3\cos^2(\theta)\sin(\phi) + 3r^2\cos(\theta)\phi\Big]_0^{2\pi}\, d\theta\, dr \\
&\quad = \int_0^5 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 6\pi r^2\cos(\theta)\, d\theta\, dr = \int_0^5 6\pi r^2\,[\sin(\theta)]_0^{\frac{\pi}{2}}\, dr \\
&\quad = 2\pi\int_0^5 3r^2\, dr = \Big[2\pi r^3\Big]_0^5 = 250\pi. \qquad \textbf{(Rechnung 2 Punkte)}
\end{aligned}$$

b) Der Körper ist berandet durch ein ebenes Stück B (wie Boden) mit der Parametrisierung:

$$p(r,\phi) := \begin{pmatrix} r\cos(\phi) \\ r\sin(\phi) \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad r\in[0,5], \quad \phi\in[0,2\pi], \qquad \textbf{(1 Punkt)}$$

und der oberen Hälfte einer Kugeloberfläche M.

c) **[3 Punkte]**

Für den Fluss durch B rechnet man:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial p}{\partial \phi} = \begin{pmatrix} -r\sin(\phi) \\ r\cos(\phi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} \times \frac{\partial p}{\partial \phi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix} \qquad f(p(r,\phi)) = \begin{pmatrix} \text{egal} \\ \text{egal} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$< f, \frac{\partial p}{\partial \phi} \times \frac{\partial p}{\partial r} >= -r \; .$$

wir erhlaten also den Fluss

$$\int_0^5 \int_0^{2\pi} < f, \frac{\partial p}{\partial \phi} \times \frac{\partial p}{\partial r} > d\phi dr = \int_0^5 \int_0^{2\pi} \quad -r\, d\phi dr$$
$$= \int_0^5 -2\pi r dr = -25\pi \, .$$

d) Nach dem Satz von Gauß gilt:

Gesamtfluss durch Oberfläche von K = Fluss durch B + Fluss durch M $= \int_K \operatorname{div}(x,y,z)\, d(x,y,z)$

Damit erhält man für den Fluss durch die gewölbte Fläche M

$250\pi + 25\pi = 275\pi.$ **(1 Punkt)**