

## Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

### Hausaufgabenblatt 7, Lösungen

#### Aufgabe 1:

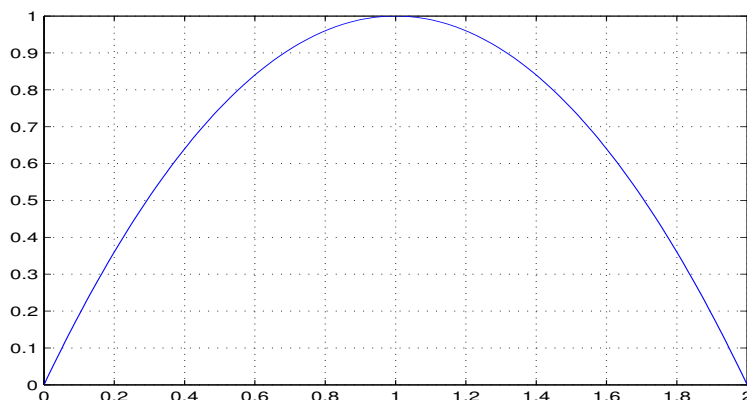
Man verifiziere den Satz von Green für das Vektorfeld

$$\mathbf{f}(x, y) = (x^2 + y, \sin x)^T$$

und das Gebiet  $G$ , das von der Funktion  $y = 1 - (x - 1)^2$  und der  $x$ -Achse eingeschlossen wird.

#### Lösung:

$$G := \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1 - (x - 1)^2\}$$



**Bild 1:** Gebiet  $G$

Parametrisierung des Randes von  $G$  durch:

$$\mathbf{c}_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}_2(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 - (t - 1)^2 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2] \quad \Rightarrow \quad \partial G = \mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2.$$

$$\begin{aligned}
 \oint_{\partial G} \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= \int_{\mathbf{c}_1} \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{\mathbf{c}_2} \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\
 &= \int_0^2 \langle \mathbf{f}(\mathbf{c}_1(t)), \dot{\mathbf{c}}_1(t) \rangle dt - \int_0^2 \langle \mathbf{f}(\mathbf{c}_2(t)), \dot{\mathbf{c}}_2(t) \rangle dt \\
 &= \int_0^2 \left\langle \begin{pmatrix} t^2 \\ \sin t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle dt \\
 &\quad - \int_0^2 \left\langle \begin{pmatrix} t^2 + 1 - (1-t)^2 \\ \sin t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2(t-1) \end{pmatrix} \right\rangle dt \\
 &= \int_0^2 t^2 - (t^2 + 1 - (1 - 2t + t^2)) - 2(t-1) \sin t \, dt \\
 &= \int_0^2 t^2 - 2t + 2(t-1) \sin t \, dt \\
 &= \left. \frac{t^3}{3} - t^2 - 2(t-1) \cos t + 2 \sin t \right|_0^2 \\
 &= \frac{8}{3} - 4 - 2 \cos 2 + 2 \sin 2 - 2 = 2 \sin 2 - 2 \cos 2 - \frac{10}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_G \operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= \int_0^2 \int_0^{1-(x-1)^2} (\sin x)_x - (x^2 + y)_y \, dy dx = \int_0^2 \int_0^{1-(x-1)^2} \cos x - 1 \, dy dx \\
 &= \int_0^2 (1 - (x-1)^2)(\cos x - 1) \, dx \\
 &= \int_0^2 \cos x - 1 + (x-1)^2 - (x-1)^2 \cos x \, dx \\
 &= \left. \sin x - x + \frac{(x-1)^3}{3} - (x-1)^2 \sin x - 2(x-1) \cos x + 2 \sin x \right|_0^2 \\
 &= \sin 2 - 2 + \frac{1}{3} - \sin 2 - 2 \cos 2 + 2 \sin 2 - \left(-\frac{1}{3} + 2\right) \\
 &= 2 \sin 2 - 2 \cos 2 - \frac{10}{3}
 \end{aligned}$$

Integralsatz von Green:  $\oint_{\partial G} \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 2 \sin 2 - 2 \cos 2 - \frac{10}{3} = \int_G \operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$

### Aufgabe 2:

Gegeben sei die Sattelfläche

$$S = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 4, z = xy\} .$$

- Man gebe eine Parametrisierung von  $S$  an,
- zeichne  $S$  mit Hilfe der MATLAB-Routine 'ezgraph3' und
- berechne den Flächeninhalt von  $S$  mit Hilfe eines Oberflächenintegrals.

### Lösung:

- Wir beschreiben zwei Parametrisierungsvarianten:
  - Parametrisierung in kartesischen Koordinaten über den Funktionsgraphen

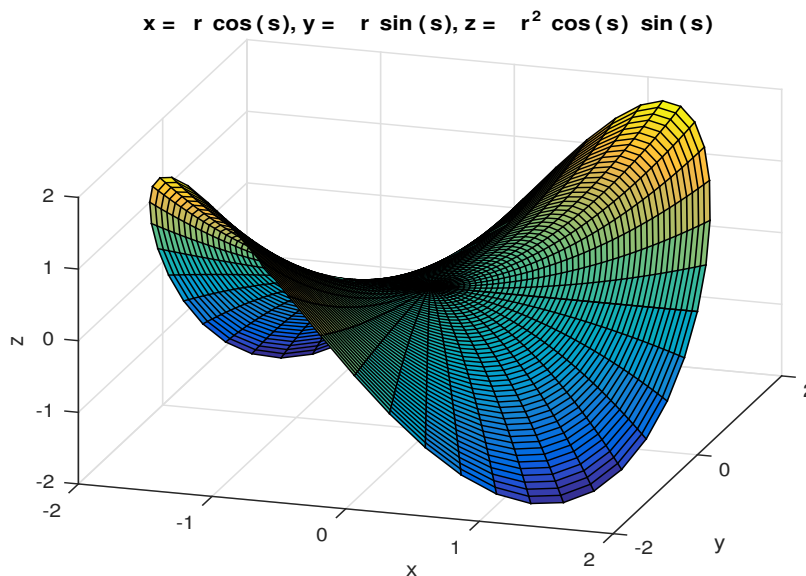
$$\mathbf{p}(x, y) = (x, y, xy)^T \quad \text{mit} \quad x^2 + y^2 \leq 4,$$

- Parametrisierung unter Verwendung von Polarkoordinaten

$$\mathbf{q}(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, r^2 \cos \varphi \sin \varphi)^T \quad \text{mit} \quad (r, \varphi) \in [0, 2] \times [0, 2\pi] .$$

- Für die Zeichnung mit MATLAB verwenden wir die Parametrisierung  $\mathbf{q}$

`ezgraph3('surf', 'r*cos(s)', 'r*sin(s)', 'r^2*cos(s)*sin(s)', [0,2,0,2*pi])`



**Bild 2:** Sattelfläche  $S$

- c) Die Berechnung der Oberfläche von  $S$  vereinfacht sich etwas mit der Parametrisierung  $\mathbf{p}$  und anschließendem Wechsel auf Polarkoordinaten unter Verwendung des Transformationssatzes .

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial y} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ -x \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial y} \right\| = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$$

$$\begin{aligned} \int_S do &= \int_{x^2+y^2 \leq 4} \left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial y} \right\| d(x, y) = \int_{x^2+y^2 \leq 4} \sqrt{1 + x^2 + y^2} d(x, y) \\ &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} r \sqrt{1 + r^2} d\varphi dr = 2\pi \int_0^2 r \sqrt{1 + r^2} dr \\ &= \frac{2\pi}{3} (1 + r^2)^{3/2} \Big|_0^2 = \frac{2\pi(5^{3/2} - 1)}{3} = 21.3217\dots \end{aligned}$$

Der alternative Weg über die Parametrisierung  $\mathbf{q}$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial r} \times \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \varphi} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \cos \varphi & \sin \varphi & 2r \cos \varphi \sin \varphi \\ -r \sin \varphi & r \cos \varphi & r^2(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \end{vmatrix} = r \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \cos \varphi & \sin \varphi & 2r \cos \varphi \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & r(1 - 2 \sin^2 \varphi) \end{vmatrix} \\ &= r \begin{pmatrix} r \sin \varphi (1 - 2 \sin^2 \varphi) - 2r \cos^2 \varphi \sin \varphi \\ -(r \cos \varphi (1 - 2 \sin^2 \varphi) + 2r \cos \varphi \sin^2 \varphi) \\ 1 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} -r \sin \varphi \\ -r \cos \varphi \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left\| \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial r} \times \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \varphi} \right\| = \left\| r \begin{pmatrix} -r \sin \varphi \\ -r \cos \varphi \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = r \sqrt{1 + r^2}$$

$$\Rightarrow \int_S do = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \left\| \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial r} \times \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \varphi} \right\| d\varphi dr = \int_0^2 \int_0^{2\pi} r \sqrt{1 + r^2} d\varphi dr$$

**Abgabetermin:** 2.2.2024