

Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften Hausaufgabenblatt 6, Lösungen

Aufgabe 1:

a) Für die Funktion

$$f : Q \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = 6 - 2x + 4y$$

mit $Q := [0, 3] \times [0, 2]$ berechne man

(i) Riemannsche Unter- und Obersumme zu folgender äquidistanter Zerlegung Z von Q

$$Q_{i,j} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j], \quad i, j = 1, \dots, n$$

wobei $x_i = \frac{3i}{n}$ und $y_j = \frac{2j}{n}$ gelte

(ii) und das Integral von f über Q nach dem Satz von Fubini.

b) (i) Man zeichne den durch die Funktionen $f(x) = 2x$ und $g(x) = 24 - 2x^2$ eingeschlossenen Bereich P und stelle ihn als Normalbereich dar.

(ii) Man berechne $\int_P x \, d(x, y)$

Lösung:

$$\begin{aligned} \text{a) (i)} \quad U_f(Z) &= \sum_{i,j=1}^n \inf_{(x,y) \in Q_{i,j}} (f(x, y)) \cdot \text{Vol}(Q_{i,j}) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n (6 - 2x_i + 4y_{j-1}) \cdot \frac{3}{n} \cdot \frac{2}{n} \right) \\ &= \frac{6}{n^3} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n (6n - 6i + 8(j-1)) \right) \\ &= \frac{6}{n^3} \sum_{i=1}^n \left(6n^2 - 6in + 8 \frac{(n-1)n}{2} \right) \\ &= \frac{6}{n^3} \left(6n^3 - 6n \frac{n(n+1)}{2} + 4n^2(n-1) \right) = 42 \left(1 - \frac{1}{n} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} O_f(Z) &= \sum_{i,j=1}^n \sup_{(x,y) \in Q_{i,j}} (f(x,y)) \cdot \text{Vol}(Q_{i,j}) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n (6 - 2x_{i-1} + 4y_j) \cdot \frac{3}{n} \cdot \frac{2}{n} \right) = 42 \left(1 + \frac{1}{n} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad \int_Q 6 - 2x + 4y \, d(x,y) &= \int_0^3 \left(\int_0^2 6 - 2x + 4y \, dy \right) dx = \int_0^3 6y - 2xy + 2y^2 \Big|_0^2 dx \\ &= \int_0^3 12 - 4x + 8 \, dx = 20x - 2x^2 \Big|_0^3 = 42 \end{aligned}$$

Man erhält natürlich:

$$42 \left(1 - \frac{1}{n} \right) = U_f(Z) \leq \int_Q f(x,y) \, d(x,y) = 42 \leq O_f(Z) = 42 \left(1 + \frac{1}{n} \right).$$

b) (i) Schnittpunkte von f und g :

$$2x = 24 - 2x^2 \Leftrightarrow 0 = x^2 + x - 12 = (x+4)(x-3) \Leftrightarrow x_1 = -4, x_2 = 3.$$

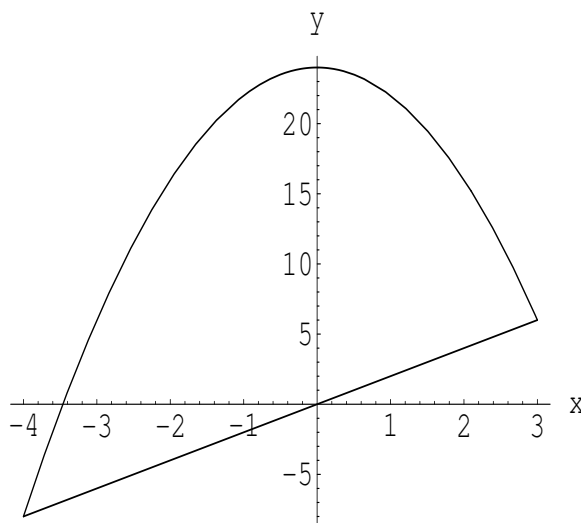


Bild 1 Normalbereich P

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid -4 \leq x \leq 3, 2x \leq y \leq 24 - 2x^2 \right\}$$

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad \int_P x \, d(x,y) &= \int_{-4}^3 \int_{2x}^{24-2x^2} x \, dy \, dx = \int_{-4}^3 (xy) \Big|_{2x}^{24-2x^2} dx \\ &= \int_{-4}^3 x(24 - 2x^2 - 2x) \, dx = -\frac{343}{6} \end{aligned}$$

Aufgabe 2:

Man zeichne den durch $1 \leq z \leq 2$, $0 \leq y$ und $x^2 + y^2 \leq 9$ gegebenen halben Zylinder Z und berechne seinen Schwerpunkt mit der Dichtefunktion $\rho(x, y, z) = z$ unter Verwendung von Zylinderkoordinaten.

Lösung:

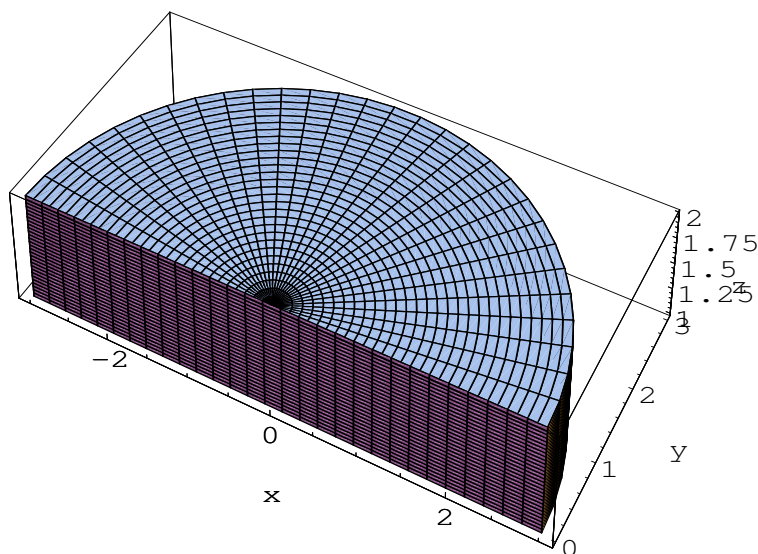


Bild 2 halber Zylinder Z

Zylinderkoordinaten für Z : $0 \leq r \leq 3$, $0 \leq \varphi \leq \pi$, $1 \leq z \leq 2$ mit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \\ r \sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix} = \Phi(r, \varphi, z), \quad \det \mathbf{J} \Phi(r, \varphi, z) = r$$

Berechnung der Masse M in Zylinderkoordinaten unter Verwendung des Transformationsatzes mit $\rho(x, y, z) = z$:

$$\begin{aligned} M &= \int_Z z \, d(x, y, z) = \int_0^3 \int_0^\pi \int_1^2 zr \, dz \, d\varphi \, dr = \int_0^3 \int_0^\pi \frac{rz^2}{2} \Big|_1^2 \, d\varphi \, dr \\ &= \frac{3}{2} \int_0^\pi \int_0^3 r \, d\varphi \, dr = \frac{3}{2} \int_0^\pi \pi r \, dr = \frac{27\pi}{4} \end{aligned}$$

Berechnung der Schwerpunktkoordinaten (x_s, y_s, z_s) :

$$\begin{aligned} x_s &= \frac{1}{M} \int_Z zx \, d(x, y, z) = \frac{1}{M} \int_0^3 \int_0^\pi \int_1^2 zr \cdot r \cos(\varphi) \, dz \, d\varphi \, dr \\ &= \frac{3}{2M} \int_0^\pi \int_0^3 r^2 \cos(\varphi) \, d\varphi \, dr = \frac{3}{2M} \int_0^\pi r^2 \sin(\varphi) \Big|_0^\pi \, dr = 0 \end{aligned}$$

$x_s = 0$ ergibt sich auch auf Grund der Symmetrie.

$$\begin{aligned}y_s &= \frac{1}{M} \int_Z zy \, d(x, y, z) = \frac{1}{M} \int_0^3 \int_0^\pi \int_1^2 zr \cdot r \sin(\varphi) \, dz \, d\varphi \, dr \\&= \frac{3}{2M} \int_0^3 \int_0^\pi r^2 \sin(\varphi) \, d\varphi \, dr = \frac{3}{2M} \int_0^3 -r^2 \cos(\varphi) \Big|_0^\pi \, dr \\&= \frac{3}{M} \int_0^3 r^2 \, dr = \frac{27}{M} = \frac{4}{\pi}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z_s &= \frac{1}{M} \int_Z z^2 \, d(x, y, z) = \frac{1}{M} \int_0^3 \int_0^\pi \int_1^2 z^2 r \, dz \, d\varphi \, dr \\&= \frac{7}{3M} \int_0^3 \int_0^\pi r \, d\varphi \, dr = \frac{7\pi}{3M} \int_0^3 r \, dr = \frac{21\pi}{2M} = \frac{14}{9}\end{aligned}$$

Aufgabe 3:

a) Für das Vektorfeld $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\mathbf{f}(x, y) = \begin{pmatrix} y + \sin x \\ xy^2 \end{pmatrix}$ berechne

man das Kurvenintegral $\oint_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$.

Dabei ist \mathbf{c} die mathematisch positiv durchlaufene Randkurve des durch $x^2 \leq y \leq x$ mit $0 \leq x \leq 1$ eingeschlossenen Gebietes G .

b) Für das Vektorfeld $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\mathbf{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} -z^2/2 \\ 0 \\ xz \end{pmatrix}$

berechne man das Kurvenintegral $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ mit der Kurve

$$\mathbf{c} : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{und} \quad \mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} 2 \cos^2 t \\ 2 \sin t \cos t \\ 2 \sin t \end{pmatrix}.$$

Lösung:

a) Die Randkurve setzt sich aus zwei glatten Teilkurven zusammen:
 $\partial G = \mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2$, mit

$$\mathbf{c}_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}_2(t) = \begin{pmatrix} 1-t \\ 1-t \end{pmatrix}, \quad \text{mit} \quad 0 \leq t \leq 1$$

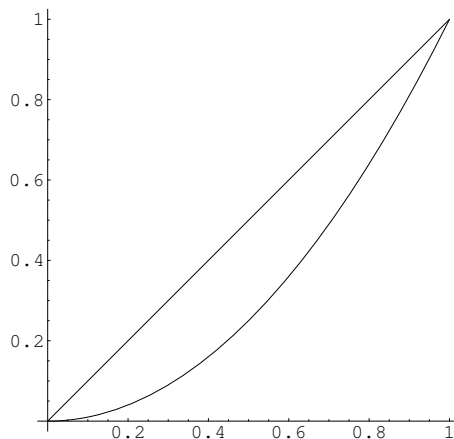


Bild 3 a) Randkurve ∂G

Zur Berechnung des Kurvenintegrals 2. Art werden die Tangentialvektoren benötigt:

$$\dot{\mathbf{c}}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{c}}_2(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \oint_{\partial G} \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= \int_{\mathbf{c}_1} \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\mathbf{c}_2} \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \int_0^1 \langle \mathbf{f}(\mathbf{c}_1(t)), \dot{\mathbf{c}}_1(t) \rangle dt + \int_0^1 \langle \mathbf{f}(\mathbf{c}_2(t)), \dot{\mathbf{c}}_2(t) \rangle dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} t^2 + \sin t \\ t \cdot t^4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} \right\rangle dt \\
 &\quad + \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} 1-t + \sin(1-t) \\ (1-t) \cdot (1-t)^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle dt \\
 &= \int_0^1 t^2 + \sin t + 2t^6 + t - 1 + \sin(t-1) + (t-1)^3 dt \\
 &= \left. \frac{t^3}{3} - \cos t + \frac{2t^7}{7} + \frac{(t-1)^2}{2} - \cos(t-1) + \frac{(t-1)^4}{4} \right|_0^1 = -\frac{11}{84}
 \end{aligned}$$

b)

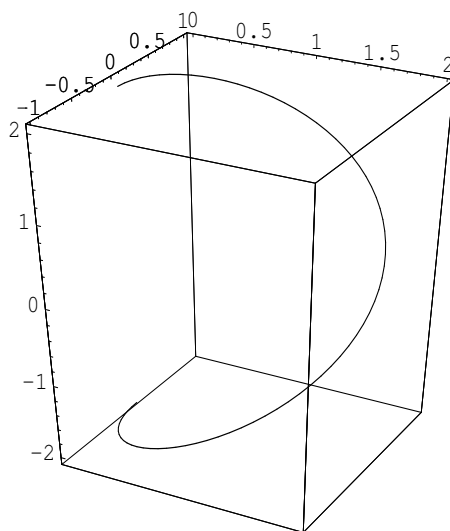


Bild 3 b) Kurve **c**

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \langle \mathbf{f}(\mathbf{c}(t)), \dot{\mathbf{c}}(t) \rangle dt \\
 &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\langle \begin{pmatrix} -2 \sin^2 t \\ 0 \\ 4 \sin t \cos^2 t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \sin t \cos t \\ 2(\cos^2 t - \sin^2 t) \\ 2 \cos t \end{pmatrix} \right\rangle dt \\
 &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 8 \sin^3 t \cos t + 8 \sin t \cos^3 t dt \\
 &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 8 \sin t \cos t dt = 4 \sin^2 t \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 0
 \end{aligned}$$