Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2023/24**
Prof. Dr. J. Struckmeier
Dr. K. Rothe

Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Hausaufgabenblatt 6

Aufgabe 1:

a) Für die Funktion

$$f : Q \to \mathbb{R}\,, \quad f(x,y) = 6 - 2x + 4y$$

mit $Q := [0,3] \times [0,2]$ berechne man

(i) Riemannsche Unter- und Obersumme zu folgender äquidistanter Zerlegung Z von Q

$$Q_{i,j} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]\,, \quad i,j = 1,\ldots,n$$

wobei $x_i = \dfrac{3i}{n}$ und $y_j = \dfrac{2j}{n}$ gelte

(ii) und das Integral von f über Q nach dem Satz von Fubini.

b) (i) Man zeichne den durch die Funktionen $f(x) = 2x$ und $g(x) = 24 - 2x^2$ eingeschlossenen Bereich P und stelle ihn als Normalbereich dar.

(ii) Man berechne $\displaystyle\int_P x \, d(x,y)$

Aufgabe 2:

Man zeichne den durch $1 \leq z \leq 2$, $0 \leq y$ und $x^2 + y^2 \leq 9$ gegebenen halben Zylinder Z und berechne seinen Schwerpunkt mit der Dichtefunktion $\rho(x,y,z) = z$ unter Verwendung von Zylinderkoordinaten.

Aufgabe 3:

a) Für das Vektorfeld $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\boldsymbol{f}(x,y) = \begin{pmatrix} y + \sin x \\ xy^2 \end{pmatrix}$ berechne man das Kurvenintegral $\oint_{\mathbf{c}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}$.

Dabei ist $\mathbf{c}$ die mathematisch positiv durchlaufene Randkurve des durch $x^2 \leq y \leq x$ mit $0 \leq x \leq 1$ eingeschlossenen Gebietes G.

b) Für das Vektorfeld $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $\boldsymbol{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} -z^2/2 \\ 0 \\ xz \end{pmatrix}$

berechne man das Kurvenintegral $\int_{\mathbf{c}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}$ mit der Kurve

$\mathbf{c} : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^3$ und $\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} 2\cos^2 t \\ 2\sin t \cos t \\ 2\sin t \end{pmatrix}$.

Abgabetermin: 19.1.2024