Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2023/24**
Prof. Dr. J. Struckmeier
Dr. K. Rothe

Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Präsenzblatt 5, Lösungen

Aufgabe 1:

Man untersuche die durch die Niveaumenge

$$f(x,y) := y^4 - 2y^2 + x^4 - 2x^2 = 0$$

implizit gegebene(n) Kurve(n). Im Einzelnen sind gesucht

a) die Symmetrien der Kurve(n),

b) die Kurvenpunkte mit horizontaler und

c) vertikaler Tangente,

d) die singulären Punkte der Kurve mit Klassifikation und

e) eine Zeichnung der Niveaumenge.

Lösung:

$f(x,y) := y^4 - 2y^2 + x^4 - 2x^2 = 0$, grad $f(x,y) = (4x(x^2-1), 4y(y^2-1))^T$

a) Die Kurve besitzt beispielsweise folgende Symmetrien:
zur x-Achse, da $f(x,y) = f(x,-y)$,
zur y-Achse, da $f(x,y) = f(-x,y)$,
zum Ursprung, da $f(x,y) = f(-x,-y)$,
zur Winkelhalbierenden, da $f(x,y) = f(y,x)$

b) Kurvenpunkte mit horizontaler Tangente ergeben sich aus den Bedingungen

$$f_x(x,y) = 0 \quad \wedge \quad f(x,y) = 0 \quad \wedge \quad f_y(x,y) \neq 0 \,.$$

$0 = f_x(x,y) = 4x(x^2-1) \quad \Rightarrow$

1. Fall: $\quad x = 0$

$\Rightarrow \quad 0 = f(0, y) = y^2(y^2 - 2) \quad \Rightarrow \quad y = 0 \,\vee\, y = \pm\sqrt{2}$

$$\Rightarrow \quad P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \; P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

2. Fall: $\quad x^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1$

$\Rightarrow \quad 0 = f(\pm 1, y) = y^4 - 2y^2 - 1 = (y^2 - 1)^2 - 2$

$\Rightarrow \quad y = \pm\sqrt{1 + \sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{1 + \sqrt{2}} \end{pmatrix},$

$$P_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{1 + \sqrt{2}} \end{pmatrix}, \; P_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{1 + \sqrt{2}} \end{pmatrix}, \; P_6 = \begin{pmatrix} -1 \\ -\sqrt{1 + \sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Da nur für $P_1, \cdots, P_6$ die Bedingung $f_y(P_i) \neq 0$ erfüllt ist, sind dies die Punkte mit horizontaler Tangente.

c) Kurvenpunkte mit vertikaler Tangente ergeben sich aus den Bedingungen

$$f_y(x, y) = 0 \quad \wedge \quad f(x, y) = 0 \quad \wedge \quad f_x(x, y) \neq 0\,.$$

$0 = f_y(x, y) = 4y(y^2 - 1) \quad \Rightarrow \quad y = 0 \quad \vee \quad y^2 - 1 = 0$

$y = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = f(x, 0) = x^2(x^2 - 2) \quad \Rightarrow \quad x = 0 \,\vee\, x = \pm\sqrt{2}$

$$\Rightarrow \quad P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; P_7 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \; P_8 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$y^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \pm 1$

$\Rightarrow \quad 0 = f(x, \pm 1) = x^4 - 2x^2 - 1 = (x^2 - 1)^2 - 2$

$\Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{1 + \sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad P_9 = \begin{pmatrix} \sqrt{1 + \sqrt{2}} \\ 1 \end{pmatrix},$

$$P_{10} = \begin{pmatrix} -\sqrt{1 + \sqrt{2}} \\ 1 \end{pmatrix}, \; P_{11} = \begin{pmatrix} \sqrt{1 + \sqrt{2}} \\ -1 \end{pmatrix}, \; P_{12} = \begin{pmatrix} -\sqrt{1 + \sqrt{2}} \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Da nur für $P_7, \cdots, P_{12}$ die Bedingung $f_x(P_i) \neq 0$ erfüllt ist, sind dies die Punkte mit vertikaler Tangente. Dieses Ergebnis kann auch aus Symmetriegründen abgeleitet werde.

d) Für $P_0 = (0, 0)^T$ gilt grad $f(0, 0) = \mathbf{0}$, damit ist P_0 einziger singulärer Punkt.

$$\boldsymbol{H}\, f(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 0 \\ 0 & 12y^2 - 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{H}\, f(0, 0) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Es liegt ein isolierter Punkt (Maximum) vor, denn es gilt $\det \boldsymbol{H}\, f(0, 0) > 0$.

e)

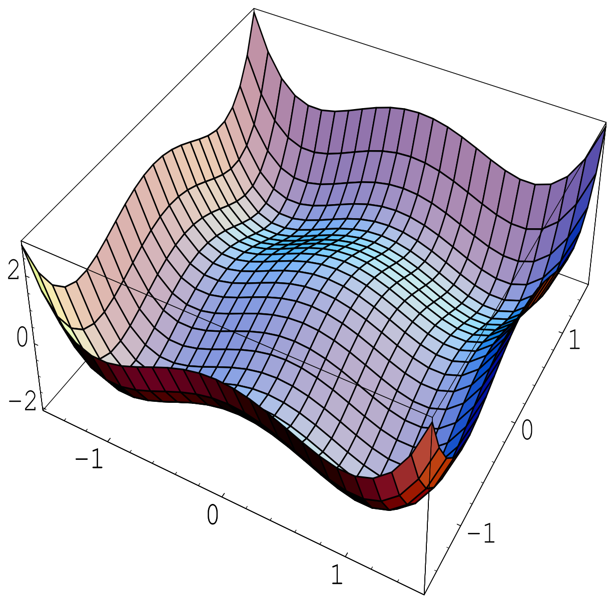

Bild 1 a) $f(x,y) = y^4 - 2y^2 + x^4 - 2x^2$

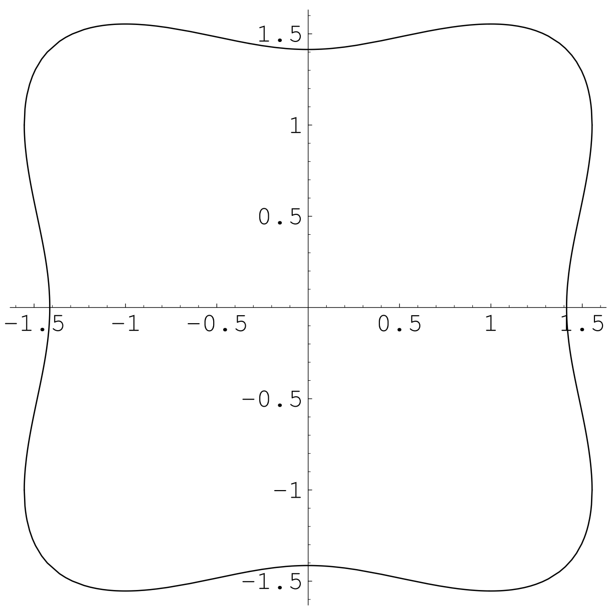

Bild 1 b) Niveaumenge $y^4 - 2y^2 + x^4 - 2x^2 = 0$,
der isolierte Punkt $P_0 = (0,0)^T$ gehört dazu

Aufgabe 2:

Man berechne und klassfiziere die Extremwerte der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = 4x^2 + y^2$ auf dem Kreis $x^2 + y^2 - 2x = 3$

a) unter Verwendung der Lagrangeschen Multiplikatorenregel und

b) über Polarkoordinatenparametrisierung $\mathbf{c}$ des Kreises und anschließendes Lösen der Extremalaufgabe $h(t) := f(\mathbf{c}(t))$.

Lösung:

Unter der Nebenbedingung $g(x,y) := (x-1)^2+y^2-4 = 0$ sollen die Extremalpunkte der Funktion $f(x,y) = 4x^2 + y^2$ bestimmt werden.

a) Regularitätsbedingung:

$\boldsymbol{J}\, g(x,y) = \text{grad } g(x,y)^T = (2(x-1), 2y) = (0,0) \;\Rightarrow\; (x,y) = (1,0)$

Es gilt $g(1,0) = -4$, d.h. der Kreismittelpunkt $(1,0)$ liegt nicht auf dem Kreis $g = 0$. Daher erfüllen alle zulässigen Punkte, d.h. $g(x,y) = 0$, die Regularitätsbedingung

$$\text{Rang}\,(\,\boldsymbol{J}\, g(x,y)) = 1\,.$$

Lagrange-Funktion: $F(x,y) = 4x^2 + y^2 + \lambda((x-1)^2 + y^2 - 4)$

Lagrange-Multiplikatorenregel:

$$\begin{pmatrix} \nabla F(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8x + 2\lambda(x-1) \\ 2y(1+\lambda) \\ (x-1)^2 + y^2 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Gleichung:

1.Fall: $y = 0 \;\Rightarrow\; 0 = g(x,0) = (x-1)^2 - 4 = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = 3\,,\; x_2 = -1$

Extremalkandidaten: $P_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

2.Fall: $\lambda = -1 \;\Rightarrow\; 0 = 8x - 2(x-1) = 6x + 2 \;\Rightarrow\; x_3 = -1/3$

$\Rightarrow\; 0 = g(-1/3, y) = (-1/3 - 1)^2 + y^2 - 4 \;\Rightarrow\; y_{2,3} = \pm\sqrt{20}/3$

Extremalkandidaten: $P_3 = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{20} \end{pmatrix}$, $P_4 = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ -\sqrt{20} \end{pmatrix}$

Da die Menge $g(x,y) = 0$ einen Kreis beschreibt, ist sie kompakt.

Die stetige Funktion f nimmt auf $g(x,y) = 0$ absolutes Maximum und Minimum an, da der Kreis eine kompakte Menge ist. Unter den Extremalkandidaten befinden sich also absolutes Maximum und Minimum.

Für die Funktionswerte der Extremalkandidaten berechnet man

$$f(P_1) = 36\,,\quad f(P_2) = 4\,,\quad f(P_{3,4}) = \frac{24}{9}\,.$$

Also ist P_1 absolutes Maximum und $P_{3,4}$ sind absolute Minima.

Die Anschauung ergibt P_2 als lokales Maximum. Dies lässt sich über die hinreichende Bedingung zweiter Ordnung, also über die Definitheitseigenschaft der Hesse-Matrix

$$\text{Hess}F(x,y) = \begin{pmatrix} 8+2\lambda & 0 \\ 0 & 2(1+\lambda) \end{pmatrix}$$

auf dem Kern von $\boldsymbol{J}\,\boldsymbol{g}\,(x,y)$ in P_2 nachweisen. Für $P_2 = (-1,0)^T$ erhält man aus der ersten Gleichung der Lagrangeschen Multiplikatorenregel

$0 = -8 - 4\lambda \;\Rightarrow\; \lambda = -2$. Damit erhält man

$$\boldsymbol{J}\,\boldsymbol{g}\,(-1,0) = (-4,0) \quad \text{und} \quad \text{Hess}F(-1,0) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} .$$

Der Kern wird aufgespannt durch $\boldsymbol{e}_2^T = (0,1)$.

Wegen $\boldsymbol{e}_2^T \text{Hess}F(-1,0)\,\boldsymbol{e}_2 = -2$, ist Hess$F$ auf dem Kern negativ definit. Also ist P_2 ein strenges lokales Maximum.

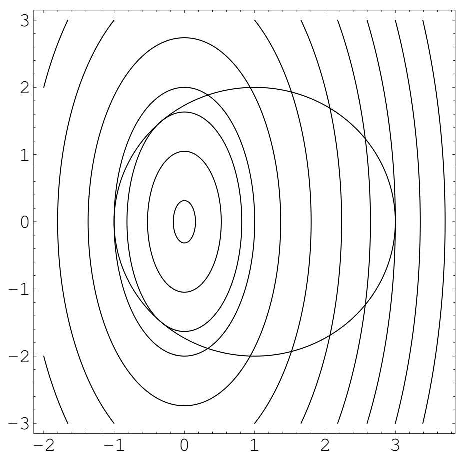

Bild 2 a) Nebenbedingung $g(x,y) := (x-1)^2 + y^2 - 4 = 0$ mit Höhenlinien der Funktion $f(x,y) = 4x^2 + y^2$

b) Der Kreis $g(x,y) = (x-1)^2 + y^2 - 4 = 0$ ist durch Polarkoordinaten folgendermaßen parametrisierbar

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos(t)+1 \\ 2\sin t \end{pmatrix} =: \mathbf{c}(t)\,, \quad 0 \le t < 2\pi\,,$$

d.h. es gilt $g(2\cos(t)+1, 2\sin(t)) = 0$. Wir suchen nun die Extrema von

$$h(t) := f(\mathbf{c}(t)) = 4(2\cos(t)+1)^2 + (2\sin t)^2 = 12\cos^2 t + 16\cos t + 8\,.$$

Extremalkandidaten: $h'(t) = -8\sin t(3\cos t + 2) = 0 \quad \Rightarrow$

$t_1 = 0\,,\ t_2 = \pi\,,\ t_3 = \arccos(-2/3)\,,\ t_4 = 2\pi - \arccos(-2/3)$.

(Für $i = 1,2,3,4$ gehören die Werte t_i zu den Punkten P_i aus a).)

$$h''(t) = -8(6\cos^2 t + 2\cos t - 3) \Rightarrow h''(t_1) = -40, h''(t_2) = -8, h''(t_{3,4}) = 40/3$$

Damit liegen für $t_{1,2}$ lokale Maxima mit den Funktionswerten $h(t_1) = 36$ und $h(t_2) = 4$ und für $t_{3,4}$ lokale Minima mit dem Funktionswert $h(t_{3,4}) = 24/9$ vor.

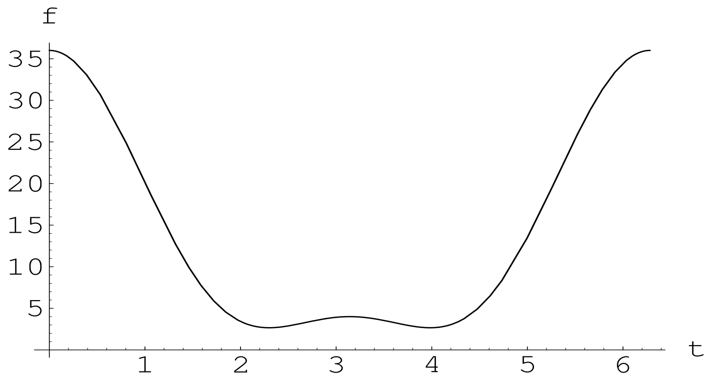

Bild 2 b) $h(t) := f(\mathbf{c}(t)) = 12\cos^2 t + 16\cos t + 8$

Besprechungstermine: 18.12. - 22.12.2023