Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2023/24**
Prof. Dr. J. Struckmeier
Dr. K. Rothe

Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Hausaufgabenblatt 5, Lösungen

Aufgabe 1:

Gegeben sei die Funktion $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$h(x, y, z) = 16z^2 + x^2 + 4y^2 + 2x - 8y + 5 \, .$$

a) Man überprüfe, ob die Niveaumenge $g(x, y, z) = c$, die durch den Punkt $(3, 1, 0)$ festgelegt wird, in der Umgebung dieses Punktes eine glatte Fläche bildet.

b) Man gebe im Punkt $(3, 1, 0)$ die Tangentialebene bezüglich der Fläche aus a) in Parameterform an.

c) Man löse obige Gleichung gegebenenfalls nach einer der Variablen auf, um die Fläche explizit anzugeben.

d) Man zeichne die Fläche.

Lösung:

a) Wegen $h(3, 1, 0) = 16$ wird die Niveaumenge durch die implizite Gleichung

$$g(x, y, z) := 16z^2 + x^2 + 4y^2 + 2x - 8y - 11 = 0$$

beschrieben. Um festzustellen, ob $g(x, y, z) = 0$ in der Umgebung des Punktes $(3, 1, 0)$ eine glatte Fläche bildet muss die Voraussetzung des Satzes über implizite Funktionen überprüft werden:

$$\text{grad } g(x, y, z) = (2x + 2, 8y - 8, 32z)^T \quad \Rightarrow \quad \text{grad } g(3, 1, 0) = (8, 0, 0)^T \, ,$$

damit ist nur $g_x(3, 1, 0) = 8$ eine invertierbare 1×1 Untermatrix. Nach dem Satz über implizite Funktionen bildet die Niveaumenge also eine glatte Fläche, die durch Auflösen von $g(x,y,z)=0$ nach x beschreibbar ist, d.h. es gilt in einer Umgebung von $(3,1,0)$

$$x = f(y,z)\,, \quad \text{mit} \quad f(1,0)=3 \quad \text{und} \quad g(f(y,z),y,z)=0\,.$$

b) In $(3,1,0)$ wird die Fläche f näherungsweise beschrieben durch die zugehörige Tangentialebene T_1, in vektorwertiger Schreibweise bedeutet dies:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(y,z) \\ y \\ z \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} T_1(y,z;1,0) \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Zur Darstellung der Tangentialebene wird benötigt:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{J}f(y,z) &= -(g_x)^{-1}(g_y,g_z) \\ &= -\frac{1}{2f(y,z)+2}(8y-8,32z) \\ \Rightarrow \qquad \boldsymbol{J}f(1,0) &= -\frac{1}{2\cdot 3+2}(0,0) = (0,0)\,. \end{aligned}$$

Damit lautet die Parameterform der Tangentialebene

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} T_1(y,z;1,0) \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} f(1,0) + \boldsymbol{J}f(1,0)\begin{pmatrix} y-1 \\ z \end{pmatrix} \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (y-1)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

c) $16z^2+x^2+4y^2+2x-8y+5=16$ kann explizit nach x aufgelöst werden. Unter Berücksichtigung von $x(1,0)=3$ kommt nur die '+' Variante beim Wurzelziehen in Frage.

$$\begin{aligned} 16 &= 16z^2+x^2+4y^2+2x-8y+5 \\ &= 16z^2+(x+1)^2+4(y-1)^2 \\ \Rightarrow \quad x(y,z) &= -1+\sqrt{16-16z^2-4(y-1)^2} =: h(y,z) \end{aligned}$$

Eine eindeutige Auflösbarkeit nach y bzw. z scheitert u.a. an der Mehrdeutigkeit der Wurzel.

d) $16 = 16z^2+x^2+4y^2+2x-8y+5 = 16z^2+(x+1)^2+4(y-1)^2$

Unter Verwendung von Kugelkoordinaten kann die gesamte Niveaumenge folgendemaßen durch $(\varphi,\theta)\in[0,2\pi]\times[-\pi/2,\pi/2]$ parametrisiert werden:

$$p(\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} 4\cos\varphi\cos\theta-1 \\ 2\sin\varphi\cos\theta+1 \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

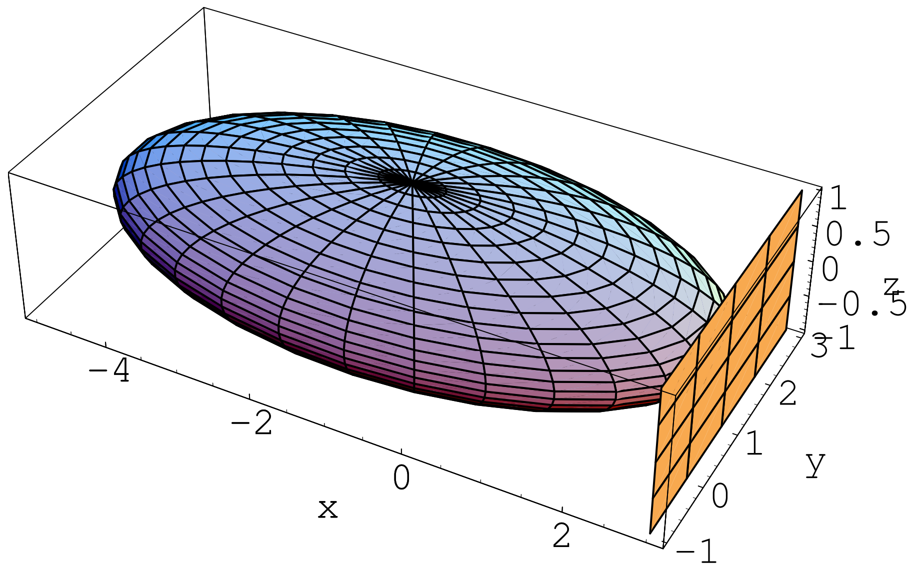

Bild 1 Niveaumenge $16z^2 + x^2 + 4y^2 + 2x - 8y + 5 = 16$ und Tangentialebene

Aufgabe 2:

Für die Funktion $f(x, y, z) = y+2z$ berechne und klassifiziere man die Extrema auf dem Schnitt des parabolischen Zylinders $z = x^2 - 1$ mit der Ebene $z = 2y$ unter Verwendung der Lagrangeschen Multiplikatorenregel.

Lösung:

Nebenbedingungen: $g_1(x, y, z) := x^2 - z - 1 = 0$ und $g_2(x, y, z) := z - 2y = 0$.

Regularitätsbedingung: $\boldsymbol{J}\ \boldsymbol{g}\,(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

besitzt in ganz $\mathbb{R}^3$ den Rang 2.

Alle zulässigen Punkte erfüllen also die Regularitätsbedingung und die Lagrangesche Multiplikatorregel kann angewendet werden:

Lagrange-Funktion: $F(x, y, z) = y + 2z + \lambda_1(x^2 - z - 1) + \lambda_2(z - 2y)$

Lagrange-Multiplikatorenregel:

$$\begin{pmatrix} \nabla F(x, y, z) \\ g(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda_1 x \\ 1 - 2\lambda_2 \\ 2 - \lambda_1 + \lambda_2 \\ x^2 - z - 1 \\ z - 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

λ_1 und λ_2 ergeben sich aus der 2. und 3. Gleichung durch Lösen eines linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 5/2\,,\ \lambda_2 = 1/2$$

1. Gleichung: $x = 0 \Rightarrow 0 = g_1(0, y, z) = -z - 1 \Rightarrow z = -1$
$\Rightarrow 0 = g_2(0, y, -1) = -1 - 2y \Rightarrow y = -1/2$

Einziger Extremalkandidat: $P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Da die Schnittmenge des parabolischen Zylinders $z = x^2 - 1$ mit der Ebene $z = 2y$ eine Parabel und damit unbeschränkt ist, kann hier kein Kompaktheitsargument verwendet werden.

Wir klassifizieren den Extremalkandidaten P_1 daher über die hinreichende Bedingung zweiter Ordnung, also über die Definitheitseigenschaft der Hesse-Matrix

$$\mathrm{Hess}F(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

auf dem Kern von $\boldsymbol{J}\ \boldsymbol{g}\,(x,y,z)$ in P_1

$$\boldsymbol{J}\ \boldsymbol{g}\,(0,-1/2,-1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}\,.$$

Der Kern wird aufgespannt durch $\boldsymbol{e}_1^T = (1,0,0)\,.$

Wegen $\boldsymbol{e}_1^T \mathrm{Hess}F(0,-1/2,-1)\,\boldsymbol{e}_1 = 2\lambda_1 = 5$, ist $\mathrm{Hess}F$ auf dem Tangentialraum positiv definit. Also ist P_1 ein strenges lokales Minimum mit dem Funktionswert $f(P_1) = -5/2\,.$

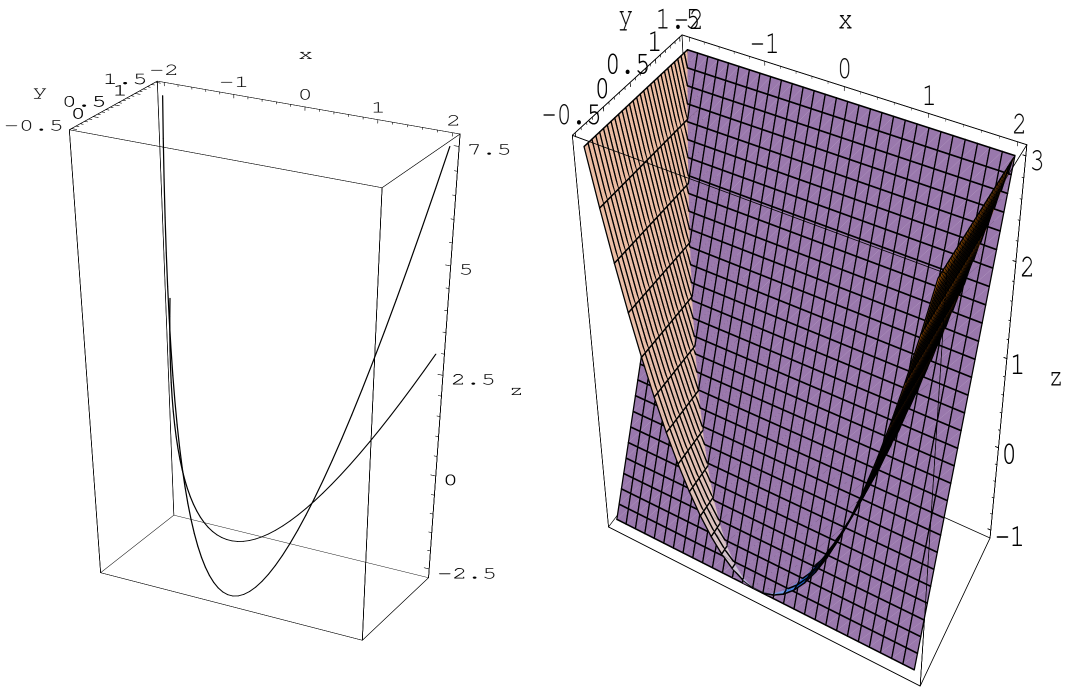

Bild 2: f auf dem Schnitt des parabolischen Zylinders $z = x^2 - 1$ mit der Ebene $z = 2y$

Abgabetermin: 22.12.2023