Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2023/24**
Prof. Dr. J. Struckmeier
Dr. K. Rothe

Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Präsenzblatt 4, Lösungen

Aufgabe 1:

Man berechne das Taylor-Polynom 2.Grades für die Funktion

$$f(x,y) = (y + \cos y)\sin x$$

im Entwicklungspunkt $(x_0, y_0) = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ und schätze den Fehler, der dadurch entsteht, wenn man T_2 anstelle von f im Punkt $(x,y) = (0,0)$ verwendet, nach oben ab.

Lösung:

$f(x,y) = (y + \cos y)\sin x \quad \Rightarrow \quad f\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = 1$

$f_x(x,y) = (y + \cos y)\cos x \quad \Rightarrow \quad f_x\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = 0$

$f_y(x,y) = (1 - \sin y)\sin x \quad \Rightarrow \quad f_y\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = 1$

$f_{xx}(x,y) = -(y + \cos y)\sin x \quad \Rightarrow \quad f_{xx}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = -1$

$f_{xy}(x,y) = (1 - \sin y)\cos x \quad \Rightarrow \quad f_{xy}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = 0$

$f_{yy}(x,y) = -\cos y \sin x \quad \Rightarrow \quad f_{yy}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = -1$

$$\begin{aligned} T_2\left(x,y;\frac{\pi}{2},0\right) &= f\left(\frac{\pi}{2},0\right)+f_x\left(\frac{\pi}{2},0\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+f_y\left(\frac{\pi}{2},0\right)y \\ &\quad +\frac{1}{2}\left(f_{xx}\left(\frac{\pi}{2},0\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2+2f_{xy}\left(\frac{\pi}{2},0\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)y+f_{yy}\left(\frac{\pi}{2},0\right)y^2\right) \\ &= 1+y-\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2-\frac{y^2}{2} \end{aligned}$$

Für die Fehlerabschätzung sind die dritten Ableitungen erforderlich

$$\begin{aligned} f_{xxx}(x,y) &= -(y+\cos y)\cos x \\ f_{xxy}(x,y) &= -(1-\sin y)\sin x \\ f_{xyy}(x,y) &= -\cos y\cos x \\ f_{yyy}(x,y) &= \sin y\sin x. \end{aligned}$$

Die Fehlerabschätzung für $(x,y)=(0,0)$ zieht mit $\theta\in]0,1[$ ein $(\xi_1,\xi_2):=\left((1-\theta)\frac{\pi}{2},0\right)$ nach sich. Es gilt also $0<\xi_1<\frac{\pi}{2}$ und $\xi_2=0$.

$$\begin{aligned} &\left|f(0,0)-T_2\left(0,0;\frac{\pi}{2},0\right)\right| = \left|R_2\left(0,0;\frac{\pi}{2},0\right)\right| \\ =\ &\frac{1}{3!}\left|f_{xxx}(\xi_1,0)\left(0-\frac{\pi}{2}\right)^3+3f_{xxy}(\xi_1,0)\left(0-\frac{\pi}{2}\right)^2\cdot(0-0)\right. \\ &\left.+3f_{xyy}(\xi_1,0)\left(0-\frac{\pi}{2}\right)\cdot(0-0)^2+f_{yyy}(\xi_1,0)(0-0)^3\right| \\ =\ &\frac{1}{3!}\left|f_{xxx}(\xi_1,0)\right|\cdot\left|-\frac{\pi}{2}\right|^3=\frac{\pi^3|-(0+\cos 0)\cos\xi_1|}{48}\leq\frac{\pi^3}{48}=0.645964... \end{aligned}$$

Der tatsächliche Fehler lautet

$$\left|f(0,0)-T_2\left(0,0;\frac{\pi}{2},0\right)\right| = \left|T_2\left(0,0;\frac{\pi}{2},0\right)\right| = \left|1-\frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{2}\right)^2\right| = 0.233701...$$

Aufgabe 2:

Man berechne alle stationären Punkte der folgenden Funktionen und klassifiziere diese:

a) $f(x, y) = \dfrac{3x^2}{2} + x^3 - y^3 + 3y\ ,$

b) $f(x, y) = 2(x^2 + y^2)^2 - x^2 - y^2\ ,$

c) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}\ ,$

d) $f(x, y) = x \sin y\ .$

Lösung:

a) grad $f(x, y) = (3x + 3x^2, -3y^2 + 3)^T = (3x(1 + x), 3(1 - y^2))^T = (0, 0)^T$

Man erhält $x = 0$ oder $x = -1$ und $y = 1$ oder $y = -1$, also insgesamt die Punkte

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ P_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ P_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Hess } f(x, y) = \begin{pmatrix} 3 + 6x & 0 \\ 0 & -6y \end{pmatrix}$$

$$\text{Hess } f(P_1) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ indefinit } \Rightarrow P_1 \text{ Sattelpunkt}$$

$$\text{Hess } f(P_2) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ positiv definit } \Rightarrow P_2 \text{ Minimum}$$

$$\text{Hess } f(P_3) = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ negativ definit } \Rightarrow P_3 \text{ Maximum}$$

$$\text{Hess } f(P_4) = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ indefinit } \Rightarrow P_4 \text{ Sattelpunkt}$$

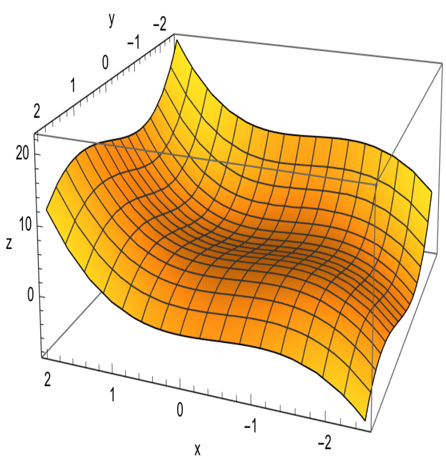

Bild 2 a): $f(x, y) = \dfrac{3x^2}{2} + x^3 - y^3 + 3y$

b) $f(x,y) = 2(x^2+y^2)^2 - x^2 - y^2 \Rightarrow \text{grad } f(x,y) = (4(x^2+y^2)-1)(2x, 2y)^T = (0,0)$
$\Rightarrow$ stationäre Punkte sind $(x_0, y_0) = (0,0)$ und alle Punkte mit

$$4(x^2+y^2) - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 .$$

Diese liegen also auf dem Kreis K vom Radius $r = \frac{1}{2}$ um $(0,0)$.

$$\boldsymbol{H}\, f(x,y) = \begin{pmatrix} 2(4(x^2+y^2)-1) + 16x^2 & 16xy \\ 16xy & 2(4(x^2+y^2)-1) + 16y^2 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{H}\, f(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ ist negativ definit

$\Rightarrow \quad (x_0, y_0) = (0,0)$ ist strenges lokales Maximum.

Für die stationären Punkte auf K erhält man mit $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$:

$$\boldsymbol{H}\, f(x,y) = \begin{pmatrix} 16x^2 & 16xy \\ 16xy & 16y^2 \end{pmatrix} .$$

Die Eigenwerte ergeben sich aus dem charakteristischen Polynom:

$$p(\lambda) = (16x^2 - \lambda)(16y^2 - \lambda) - 16^2x^2y^2 = \lambda^2 - 16(x^2+y^2)\lambda = \lambda(\lambda - 4) = 0$$

$\Rightarrow \quad \lambda_1 = 0\,, \lambda_2 = 4 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{H}\, f(x,y)$ ist positiv semidefinit.
Damit können die Punkte auf K keine lokalen Maxima sein.
Man erkennt, dass f mit $r^2 = x^2+y^2$ rotationssymmetrisch aus $\tilde{f}(r) = 2r^4 - r^2$ ensteht. $\tilde{f}$ besitzt für $r = \pm\frac{1}{2}$ absolute Minima und für $r = 0$ ein strenges lokales Maximum.
Bei den Punkten auf K handelt es sich also um (keine strengen) absolute Minima.

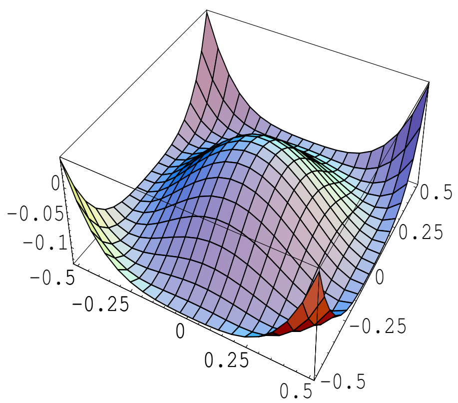

Bild 2 b): $\quad f(x,y) = 2(x^2+y^2)^2 - x^2 - y^2$

c) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

Die Schlussweise

$$\text{grad } f(x,y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)^T = (0,0)^T \quad \Rightarrow \quad (x_0, y_0) = (0,0)$$

ist nicht zulässig, da grad f in $(0,0)$ nicht existiert.

Es gibt also keine stationären Punkte.

Dennoch bleibt $(0,0)$ natürlich strenges globales Minimum, wegen $f(0,0) = 0$ und $f(x,y) > 0 \Leftrightarrow (x,y) \neq (0,0)$.

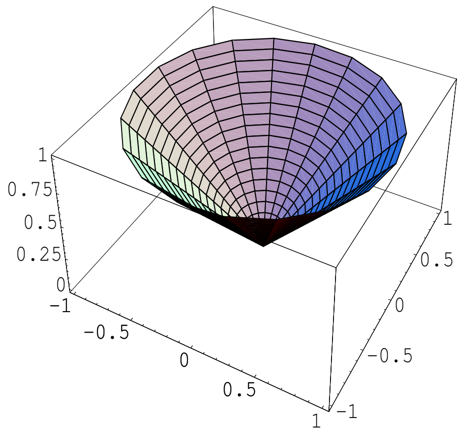

Bild 2 c): $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

d) $f(x,y) = x \sin y$.

grad $f(x,y) = (\sin y, x\cos y)^T = (0,0)^T$

$$\Rightarrow \quad \sin y = 0 \quad \Rightarrow \quad y_k = k\pi \quad \Rightarrow \quad \cos(k\pi) = (-1)^k \quad \Rightarrow \quad x_k = 0$$

Die stationären Punkte lauten also $(x_k, y_k) = (0, k\pi)$

$$\boldsymbol{H}\, f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & \cos y \\ \cos y & -x\sin y \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{H}\, f(0,k\pi) = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^k \\ (-1)^k & 0 \end{pmatrix}$$

besitzt die Eigenwerte $\lambda_{1,2} = \pm 1$.

Damit ist $\boldsymbol{H}\, f(0,k\pi)$ indefinit und alle stationären Punkte sind Sattelpunkte.

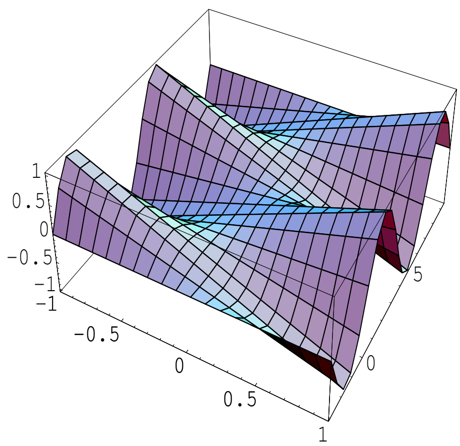

Bild 2 d): $f(x,y) = x \sin y$

Besprechungstermine: 4.12. - 8.12.2023