

## Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

### Präsenzblatt 3, Lösungen

#### Aufgabe 1:

- a) Man berechne die Jacobi-Matrix unter Verwendung der Kettenregel von:

$$h : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\mathbf{f}} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} \mapsto g(u, v).$$

- b) Man berechne die Jacobi-Matrix unter Verwendung der Kettenregel und direkt:

$$\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\mathbf{f}_1} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\mathbf{f}_2} \mathbb{R}^2$$
$$\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u = \sin(rs) \\ v = e^r + s \\ w = 1 - 2s^3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} uw \\ vw \end{pmatrix}.$$

#### Lösung:

- a) Kettenregel:  $h = g \circ \mathbf{f}$  bzw.  $h(x, y) = g(u(x, y), v(x, y))$

$$\mathbf{J} \mathbf{f}(x, y) = \begin{pmatrix} u_x(x, y) & u_y(x, y) \\ v_x(x, y) & v_y(x, y) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{J} g(u, v) = (g_u(u, v), g_v(u, v))$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \mathbf{J}h(x, y) &= (h_x(x, y), h_y(x, y)) = \mathbf{J}g(u, v) \cdot \mathbf{J}\mathbf{f}(x, y) \\
 &= (g_u(u, v), g_v(u, v)) \begin{pmatrix} u_x(x, y) & u_y(x, y) \\ v_x(x, y) & v_y(x, y) \end{pmatrix} \\
 &= (g_u(u, v) \cdot u_x(x, y) + g_v(u, v) \cdot v_x(x, y), \\
 &\quad g_u(u, v) \cdot u_y(x, y) + g_v(u, v) \cdot v_y(x, y)) \\
 &= (g_u u_x + g_v v_x, g_u u_y + g_v v_y) = (h_x, h_y)
 \end{aligned}$$

b) Kettenregel:  $\mathbf{f} = \mathbf{f}_2 \circ \mathbf{f}_1$

$$\mathbf{J}\mathbf{f}_1(r, s) = \begin{pmatrix} s \cos(rs) & r \cos(rs) \\ e^r & 1 \\ 0 & -6s^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}\mathbf{f}_2(u, v, w) = \begin{pmatrix} w & 0 & u \\ 0 & w & v \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{J}\mathbf{f}(r, s) &= \mathbf{J}(\mathbf{f}_2 \circ \mathbf{f}_1)(r, s) = \mathbf{J}\mathbf{f}_2(\mathbf{f}_1(r, s)) \cdot \mathbf{J}\mathbf{f}_1(r, s) \\
 &= \begin{pmatrix} w & 0 & u \\ 0 & w & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \cos(rs) & r \cos(rs) \\ e^r & 1 \\ 0 & -6s^2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} ws \cos(rs) & wr \cos(rs) - 6us^2 \\ we^r & w - 6vs^2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} (1 - 2s^3)s \cos(rs) & (1 - 2s^3)r \cos(rs) - 6s^2 \sin(rs) \\ e^r(1 - 2s^3) & 1 - 2s^3 - 6(e^r + s)s^2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

direkt:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f}_2(\mathbf{f}_1(r, s)) &= \mathbf{f}_2(u(r, s), v(r, s), w(r, s)) \\
 &= \mathbf{f}(r, s) = \begin{pmatrix} \sin(rs)(1 - 2s^3) \\ (e^r + s)(1 - 2s^3) \end{pmatrix} \\
 \Rightarrow \mathbf{J}\mathbf{f}(r, s) &= \begin{pmatrix} s \cos(rs)(1 - 2s^3) & r \cos(rs)(1 - 2s^3) - 6s^2 \sin(rs) \\ e^r(1 - 2s^3) & (1 - 2s^3) - 6s^2(e^r + s) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

**Aufgabe 2:**

a) Man zeichne folgende Kreise und Ellipsen

- (i)  $x^2 + y^2 = 5$ ,
- (ii)  $16x^2 + 25y^2 = 400$ ,
- (iii)  $x^2 + y^2 + 6(x - y) + 9 = 0$ ,
- (iv)  $x^2 + 2y^2 - 16y + 28 = 0$ .

und stelle die  $(x, y)$  der Lösungsmengen der obigen Gleichungen jeweils unter Verwendung von Polarkoordinaten dar.

b) Man zeichne die Lösungsmengen folgender Bereiche im  $\mathbb{R}^3$

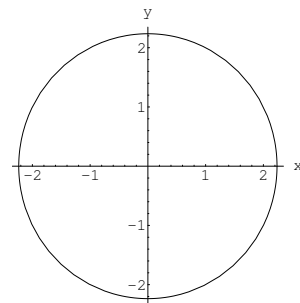
- (i)  $x \leq 0, y \leq 0, 0 \leq z$  und  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$
- (ii)  $1 \leq z \leq 2, 0 \leq y$  und  $x^2 + y^2 \leq 9$

und stelle sie durch Zylinder- bzw. Kugelkoordinaten dar.

**Lösung:**

a) (i)  $x^2 + y^2 = 5$

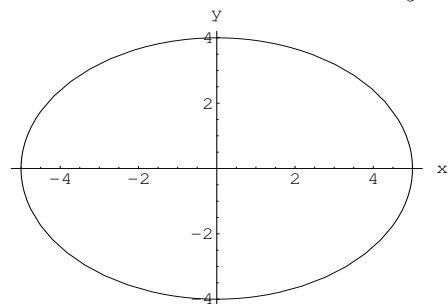
beschreibt einen Kreis  
 vom Radius  $r = \sqrt{5}$   
 mit Mittelpunkt  $(0, 0)$   
 $(x, y) = (\sqrt{5} \cos(\varphi), \sqrt{5} \sin(\varphi))$   
 mit  $-\pi \leq \varphi < \pi$



**Bild 2.1** Kreis  $x^2 + y^2 = 5$

(ii)  $16x^2 + 25y^2 = 400$

$\Leftrightarrow \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$   
 beschreibt eine Ellipse  
 mit den Halbachsen  
 $a = 5$  und  $b = 4$   
 und Mittelpunkt  $(0, 0)$ .



**Bild 2.2** Ellipse  $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$

$(x, y) = (5 \cos(\varphi), 4 \sin(\varphi))$   
 mit  $-\pi \leq \varphi < \pi$

(iii) Durch quadratische Ergänzungen ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 + y^2 + 6(x - y) + 9 \\ &= x^2 + 6x + 9 + y^2 - 6y + 9 - 9 \\ &\Leftrightarrow (x + 3)^2 + (y - 3)^2 = 9. \end{aligned}$$

Dadurch wird ein Kreis

mit Mittelpunkt  $(-3, 3)$

und Radius  $r = 3$  beschrieben.

$$(x, y) = (3 \cos(\varphi) - 3, 3 \sin(\varphi) + 3)$$

mit  $-\pi \leq \varphi < \pi$

(iv) Durch quadratische Ergänzung ergibt sich

$$\begin{aligned} x^2 + 2y^2 - 16y + 28 &= x^2 + 2(y^2 - 8y + 16) - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y-4}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1. \end{aligned}$$

Dies beschreibt eine Ellipse

um den Mittelpunkt  $(0, 4)$

mit den Halbachsen

$$a = 2 \text{ und } b = \sqrt{2}$$

$$(x, y) = (2 \cos(\varphi), \sqrt{2} \sin(\varphi) + 4)$$

mit  $-\pi \leq \varphi < \pi$

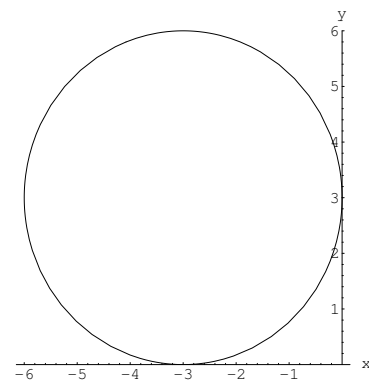


Bild 2.3 Kreis  $(x + 3)^2 + (y - 3)^2 = 9$

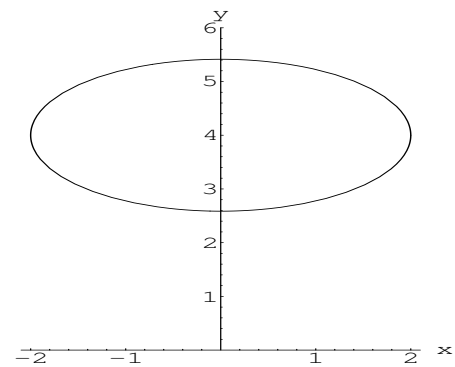


Bild 2.4 Ellipse  $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y-4}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1$

b) (i)  $x \leq 0, y \leq 0, 0 \leq z$  und  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$

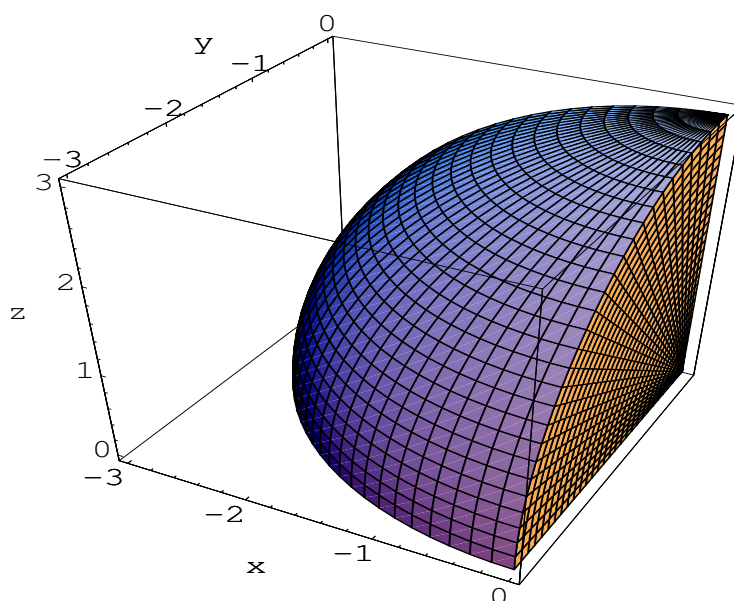


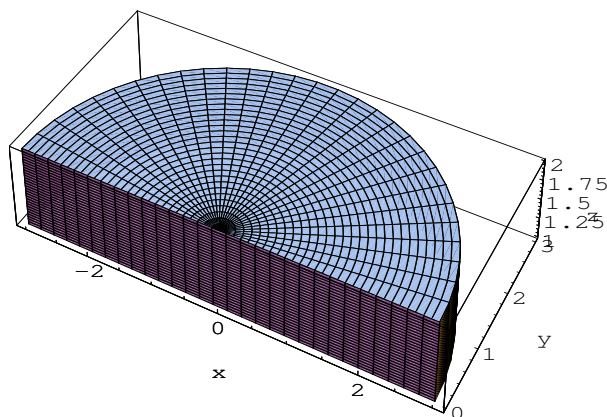
Bild 2.5 Achtelkugel  $K$

Kugelkoordinaten für  $K$ :  $\mathbf{u} = (r, \varphi, \theta)^T$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi(r, \varphi, \theta) = \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \cos(\theta) \\ r \sin(\varphi) \cos(\theta) \\ r \sin(\theta) \end{pmatrix}$$

mit  $0 \leq r \leq 3$ ,  $-\pi \leq \varphi \leq -\frac{\pi}{2}$ ,  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

(ii)  $1 \leq z \leq 2$ ,  $0 \leq y$  und  $x^2 + y^2 \leq 9$



**Bild 2.6** halber Zylinder  $Z$

Zylinderkoordinaten für  $Z$ :  $\mathbf{u} = (r, \varphi, z)^T$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \\ r \sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix} = \Phi(r, \varphi, z)$$

mit  $0 \leq r \leq 3$ ,  $0 \leq \varphi \leq \pi$ ,  $1 \leq z \leq 2$

**Besprechungstermine:** 20.11. - 24.11.23