

Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Hausaufgabenblatt 3, Lösungen

Aufgabe 1:

Man berechne für die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x^2 + y$ im Punkt (x_0, y_0) die Ableitung in Richtung $\mathbf{h} = (h_1, h_2)^T$. Welchen Anstieg besitzt die Funktion im Punkt $(2, -3)$ in den durch die Gerade $2x + 7y = 3$ gegebenen Richtungen.

Lösung:

Da f stetig partiell differenzierbar ist, kann die Richtungsableitung in (x_0, y_0) folgendermaßen berechnet werden:

$$D_{\mathbf{h}} f(x_0, y_0) = \langle \text{grad } f(x_0, y_0), \mathbf{h} \rangle = (2x_0, 1) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 2x_0 h_1 + h_2$$

Die Gerade $2x + 7y = 3$ in Parameterform lautet:

$$\mathbf{g}(x) = \begin{pmatrix} x \\ y(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 3/7 - 2x/7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3/7 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ -2/7 \end{pmatrix}$$

Zur Berechnung des Anstieges ist der in der Richtungsableitung verwendete Richtungsvektor \mathbf{h} aus der Geradengleichung noch zu normieren:

$$\mathbf{h} = \pm \frac{7}{\sqrt{53}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2/7 \end{pmatrix} = \pm \frac{1}{\sqrt{53}} \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Der An- bzw. Abstieg im Punkt $(x_0, y_0) = (2, -3)$ lautet daher

$$D_{\mathbf{h}} f(2, -3) = 4h_1 + h_2 = \pm \left(\frac{28}{\sqrt{53}} - \frac{2}{\sqrt{53}} \right) = \pm \frac{26}{\sqrt{53}}.$$

Aufgabe 2:

Gegeben sei die Koordinatentransformation

$$\Phi(r, \varphi) = \begin{pmatrix} x(r, \varphi) \\ y(r, \varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2r \cos \varphi \\ 3r \sin \varphi \end{pmatrix}$$

mit $(r, \varphi) \in Q :=]0, 1] \times \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$.

- Man berechne $\mathbf{J} \Phi(r, \varphi)$ und $\det(\mathbf{J} \Phi(r, \varphi))$ sowie
- $\Phi^{-1}(x, y)$, $\mathbf{J} \Phi^{-1}(x, y)$ und $\det(\mathbf{J} \Phi^{-1}(x, y))$.
- Man zeichne Q und $\Phi(Q)$.

Lösung:

$$\text{a) } \mathbf{J} \Phi(r, \varphi) = \begin{pmatrix} x_r & x_\varphi \\ y_r & y_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cos \varphi & -2r \sin \varphi \\ 3 \sin \varphi & 3r \cos \varphi \end{pmatrix},$$

$$\det(\mathbf{J} \Phi(r, \varphi)) = 6r$$

b) Bei Φ handelt es sich um Ellipsenkoordinaten, d.h. es gilt

$$\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} = r^2 \stackrel{0 < r \leq 1}{\Rightarrow} r(x, y) = \sqrt{x^2/4 + y^2/9} = \left(\sqrt{9x^2 + 4y^2} \right) / 6$$

$$\frac{y}{x} = \frac{3r \sin \varphi}{2r \cos \varphi} = \frac{3}{2} \tan \varphi \stackrel{-\pi/2 < \varphi < \pi/2}{\Rightarrow} \varphi(x, y) = \arctan \frac{2y}{3x}$$

$$\Phi^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} r(x, y) \\ \varphi(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\sqrt{9x^2 + 4y^2} \right) / 6 \\ \arctan \frac{2y}{3x} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{J} \Phi^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} r_x & r_y \\ \varphi_x & \varphi_y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2 \cdot 9x}{2 \cdot 6 \sqrt{9x^2 + 4y^2}} & \frac{2 \cdot 4y}{2 \cdot 6 \sqrt{9x^2 + 4y^2}} \\ -\frac{2y}{3x^2(1+(2y/3x)^2)} & \frac{2}{3x(1+(2y/3x)^2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3x}{2\sqrt{9x^2+4y^2}} & \frac{2y}{3\sqrt{9x^2+4y^2}} \\ -\frac{6y}{9x^2+4y^2} & \frac{6x}{9x^2+4y^2} \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathbf{J} \Phi^{-1}(x, y))$$

$$= \frac{3x}{2\sqrt{9x^2+4y^2}} \cdot \frac{6x}{9x^2+4y^2} - \frac{2y}{3\sqrt{9x^2+4y^2}} \cdot \left(-\frac{6y}{9x^2+4y^2} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{9x^2+4y^2}}$$

Alternativ:

$$\mathbf{J} \Phi^{-1}(x, y) = (\mathbf{J} \Phi(r(x, y), \varphi(x, y)))^{-1}$$

$$= \frac{1}{6r} \begin{pmatrix} 3r \cos \varphi & 2r \sin \varphi \\ -3 \sin \varphi & 2 \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6r} \begin{pmatrix} 3x/2 & 2y/3 \\ -y/r & x/r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3x}{2\sqrt{9x^2+4y^2}} & \frac{2y}{3\sqrt{9x^2+4y^2}} \\ -\frac{6y}{9x^2+4y^2} & \frac{6x}{9x^2+4y^2} \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathbf{J} \Phi^{-1}(x, y)) = \frac{1}{\det(\mathbf{J} \Phi(r, \varphi))} = \frac{1}{6r} = \frac{1}{\sqrt{9x^2 + 4y^2}}.$$

c)

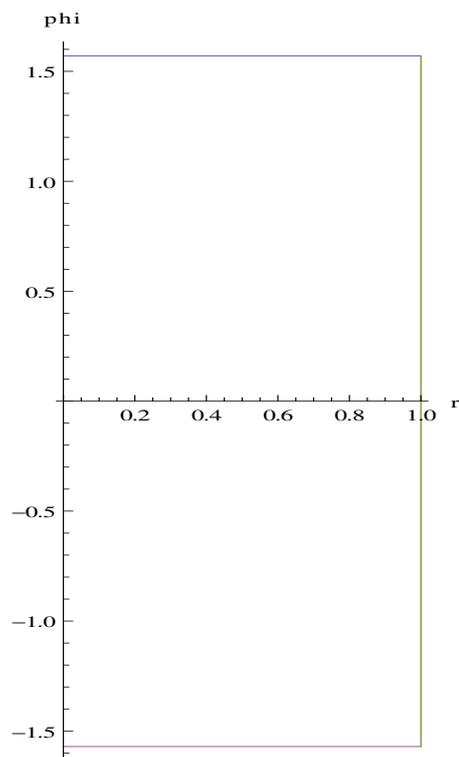


Bild 2 a: Q

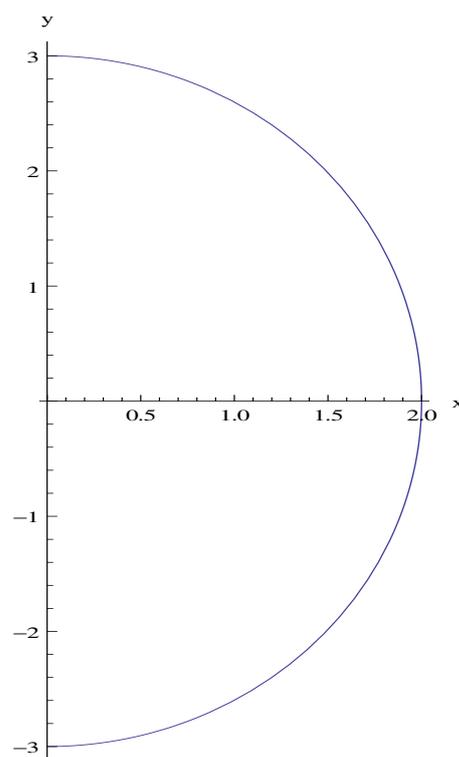


Bild 2 b: $\Phi(Q)$

Abgabetermin: 24.11.2023