

## Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

### Präsenzblatt 2, Lösungen

#### Aufgabe 1:

Gegeben sei das Vektorfeld

$$\mathbf{g}(x, y) = (u(x, y), v(x, y))^T = (1, 3x^2)^T.$$

- Man berechne  $\operatorname{div} \mathbf{g}$  und  $\operatorname{rot} \mathbf{g}$  und
- zeichne das Vektorfeld und einige Stromlinien im Bereich  $[-1, 1] \times [-1, 1]$ .

#### Lösung:

- $\mathbf{g}(x, y) = (u(x, y), v(x, y))^T = (1, 3x^2)^T$   
 $\operatorname{div} \mathbf{g} = u_x + v_y = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{g} = v_x - u_y = 6x - 0 = 6x$
- Die MATLAB-Befehle für das Vektorfeld lauten:

```
[X,Y] = meshgrid(-1:.2:1);  
U=X.^0;  
V=3*X.^2;  
quiver(X,Y,U,V)
```

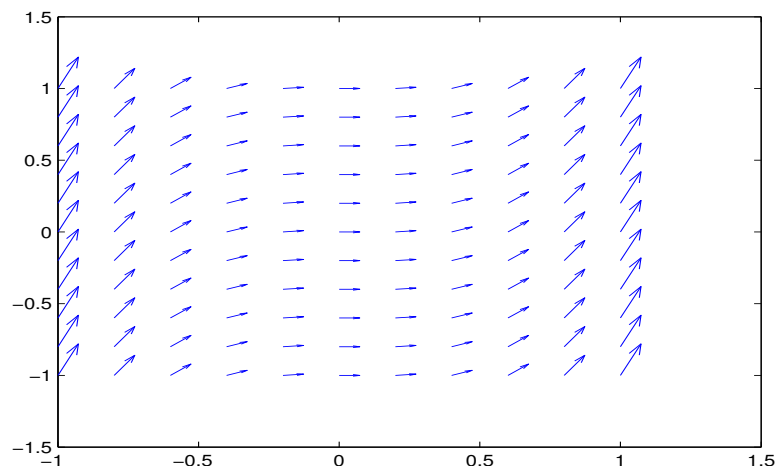


Bild 1 b.1 Vektorfeld  $\mathbf{g}(x, y) = (1, 3x^2)^T$

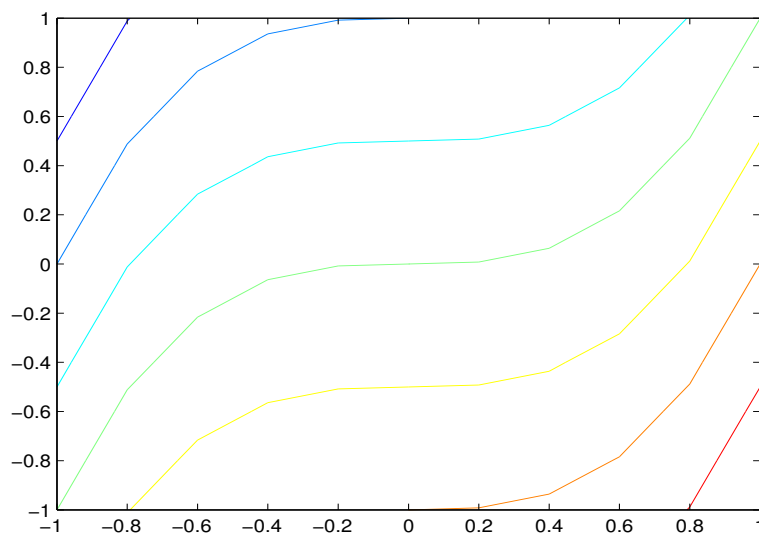
Stromlinien sind die Kurven  $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t))^T$ , deren Tangentialvektoren durch das Vektorfeld  $\mathbf{g}$  gegeben sind

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} &= \mathbf{g}(x(t), y(t)) = \begin{pmatrix} u(x(t), y(t)) \\ v(x(t), y(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3(x(t))^2 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} t + a \\ (t + a)^3 + b \end{pmatrix} \stackrel{x(0)=0 \Rightarrow a=0}{\Rightarrow} \mathbf{c}(x) = \begin{pmatrix} x \\ x^3 + b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Alternativ  $y'(x) = \frac{v(x, y(x))}{u(x, y(x))}$ :  $y'(x) = \frac{3x^2}{1} \Rightarrow y(x) = x^3 + b, \quad b \in \mathbb{R}$

Die MATLAB-Befehle für die Stromlinien lauten:

```
[X,Y] = meshgrid(-1:.2:1);
Z = X.^3-Y;
contour(X,Y,Z)
```



**Bild 1 b.2** Stromlinien  $\mathbf{c}(x) = (x, x^3 + b)^T, b \in \mathbb{R}$

**Aufgabe 2:**

Man berechne die Jacobi-Matrizen der folgenden Funktionen mit den Abbildungsvorschriften

- a)  $f(x, y, z) = \sqrt{z} \sin(x + y) + e^{y+z}$  und  $x, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}^+$ ,
- b)  $\mathbf{g}(t) = (\cos t, \sin t)^T$  und  $t \in \mathbb{R}$ ,
- c)  $\mathbf{h}(x, y) = (x + y^2, 3x^2 + 4y)^T$  und  $x, y \in \mathbb{R}$ ,
- d)  $\mathbf{u}(t, x, y, z) = (x - e^{y-t}, 3z - xt^2, t + 5x + y^2 + 4z)^T$  und  $t, x, y, z \in \mathbb{R}$ .

**Lösung:**

a)  $f(x, y, z) = \sqrt{z} \sin(x + y) + e^{y+z}$

$$\begin{aligned} \mathbf{J} f(x, y, z) &= (f_x, f_y, f_z) = \text{grad} f(x, y, z) \\ &= \left( \sqrt{z} \cos(x + y), \sqrt{z} \cos(x + y) + e^{y+z}, \frac{1}{2\sqrt{z}} \sin(x + y) + e^{y+z} \right) \end{aligned}$$

b)  $\mathbf{g}(t) = (\cos t, \sin t)^T$

$$\mathbf{J} \mathbf{g}(t) = (g'_1(t), g'_2(t))^T = \mathbf{g}'(t) = (-\sin t, \cos t)^T$$

c)  $\mathbf{h}(x, y) = (x + y^2, 3x^2 + 4y)^T$  und  $x, y \in \mathbb{R}$ ,

$$\mathbf{J} \mathbf{h}(x, y) = \begin{pmatrix} h_{1x} & h_{1y} \\ h_{2x} & h_{2y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2y \\ 6x & 4 \end{pmatrix}$$

d)  $\mathbf{u}(t, x, y, z) = (x - e^{y-t}, 3z - xt^2, t + 5x + y^2 + 4z)^T$  und  $t, x, y, z \in \mathbb{R}$ ,

$$\mathbf{J} \mathbf{u}(t, x, y, z) = \begin{pmatrix} u_{1t} & u_{1x} & u_{1y} & u_{1z} \\ u_{2t} & u_{2x} & u_{2y} & u_{2z} \\ u_{3t} & u_{3x} & u_{3y} & u_{3z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{y-t} & 1 & -e^{y-t} & 0 \\ -2xt & -t^2 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 2y & 4 \end{pmatrix}$$

**Besprechungstermine:** 6.11. - 10.11.23