Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2023/24**
Prof. Dr. J. Struckmeier
Dr. K. Rothe

Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Hausaufgabenblatt 2, Lösungen

Aufgabe 1:

Man berechne Divergenz und Rotation für folgende Vektorfelder mit $x, y, z \in \mathbb{R}$

a) $\boldsymbol{f}(x, y) = (\sin x \cos y, (x+y)^2)^T$,

b) $\boldsymbol{g}(x, y) = (\sin y \cos x, -2xy)^T$,

c) $\boldsymbol{f}(x, y) + \boldsymbol{g}(x, y)$,

d) $\boldsymbol{h}(x, y, z) = (e^{x+y+z}, e^{x+y+z}, e^{x+y+z})^T$,

e) $\boldsymbol{u}(x, y, z) = (yz, xz, xy)^T$,

f) $2\,\boldsymbol{h}(x, y, z) - \boldsymbol{u}(x, y, z)$.

Lösung:

a) $\operatorname{div} \boldsymbol{f} = f_{1x} + f_{2y} = \cos x \cos y + 2(x+y)$
$\operatorname{rot} \boldsymbol{f} = f_{2x} - f_{1y} = 2(x+y) + \sin x \sin y$

b) $\operatorname{div} \boldsymbol{g} = g_{1x} + g_{2y} = -\sin y \sin x - 2x$
$\operatorname{rot} \boldsymbol{g} = g_{2x} - g_{1y} = -2y - \cos y \cos x$

c) $\operatorname{div}(\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g}) = \operatorname{div} \boldsymbol{f} + \operatorname{div} \boldsymbol{g}$
$= \cos x \cos y + 2(x+y) - \sin y \sin x - 2x = \cos(x+y) + 2y$
$\operatorname{rot}(\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g}) = \operatorname{rot} \boldsymbol{f} + \operatorname{rot} \boldsymbol{g}$
$= 2(x+y) + \sin x \sin y - 2y - \cos y \cos x = 2x - \cos(x+y)$

alternativ:

$\boldsymbol{f}\,(x,y) + \boldsymbol{g}\,(x,y) \;= (\sin x \cos y + \sin y \cos x, (x+y)^2 - 2xy)^T$

$= (\sin(x+y), x^2+y^2)^T$

$\operatorname{div}(\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g}) = \cos(x+y) + 2y$

$\operatorname{rot}(\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g}) = 2x - \cos(x+y)$

d) $\boldsymbol{h}\,(x,y,z) = (e^{x+y+z}, e^{x+y+z}, e^{x+y+z})^T$,

$\operatorname{div}\boldsymbol{h} = h_{1x} + h_{2y} + h_{3z} = e^{x+y+z} + e^{x+y+z} + e^{x+y+z} = 3e^{x+y+z}$

$\operatorname{rot}\boldsymbol{h} = (h_{3y} - h_{2z}, h_{1z} - h_{3x}, h_{2x} - h_{1y})^T$

$= (e^{x+y+z} - e^{x+y+z}, e^{x+y+z} - e^{x+y+z}, e^{x+y+z} - e^{x+y+z})^T = \mathbf{0}$

alternativ:

$$\boldsymbol{h}\,(x,y,z) = \varphi(x,y,z)\,\boldsymbol{v} \quad \text{mit} \quad \varphi(x,y,z) = e^{x+y+z} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Man erhält

$\nabla\varphi = \boldsymbol{h}$, $\quad \operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0$, $\quad \operatorname{rot}\boldsymbol{v} = \mathbf{0} \quad$ und

$(\nabla\varphi) \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{h} \times \boldsymbol{v} = (\varphi(x,y,z)\,\boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{v} = \varphi(x,y,z)(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v}) = \mathbf{0}$.

Damit ergibt sich

$\operatorname{div}\boldsymbol{h} = (\nabla\varphi, \boldsymbol{v}) + \varphi \operatorname{div}\boldsymbol{v} = 3e^{x+y+z}$

$\operatorname{rot}\boldsymbol{h} = (\nabla\varphi) \times \boldsymbol{v} + \varphi \operatorname{rot}\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$.

e) $\boldsymbol{u}\,(x,y,z) = (yz, xz, xy)^T$,

$\operatorname{div}\boldsymbol{u} = u_{1x} + u_{2y} + u_{3z} = 0 + 0 + 0 = 0$

$\operatorname{rot}\boldsymbol{u} = (u_{3y} - u_{2z}, u_{1z} - u_{3x}, u_{2x} - u_{1y})^T = (x-x, y-y, z-z) = \mathbf{0}$

f) $\operatorname{div}(2\,\boldsymbol{h}\,(x,y,z) - \boldsymbol{u}\,(x,y,z)) = 2\operatorname{div}\boldsymbol{h} - \operatorname{div}\boldsymbol{u} = 6e^{x+y+z}$

$\operatorname{rot}(2\,\boldsymbol{h}\,(x,y,z) - \boldsymbol{u}\,(x,y,z)) = 2\operatorname{rot}\boldsymbol{h} - \operatorname{rot}\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$

Aufgabe 2:

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{2x^2+3y^2} & \text{, falls} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{, falls} \quad (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

a) Man zeichne die Funktion im Bereich $[-1,1] \times [-1,1]$.

b) Man berechne die partiellen Ableitungen von f im Punkt $(x_0, y_0) = (0,0)$.

c) Man überprüfe, ob f im Punkt $(x_0, y_0) = (0,0)$ (vollständig) differenzierbar ist.

Lösung:

a)

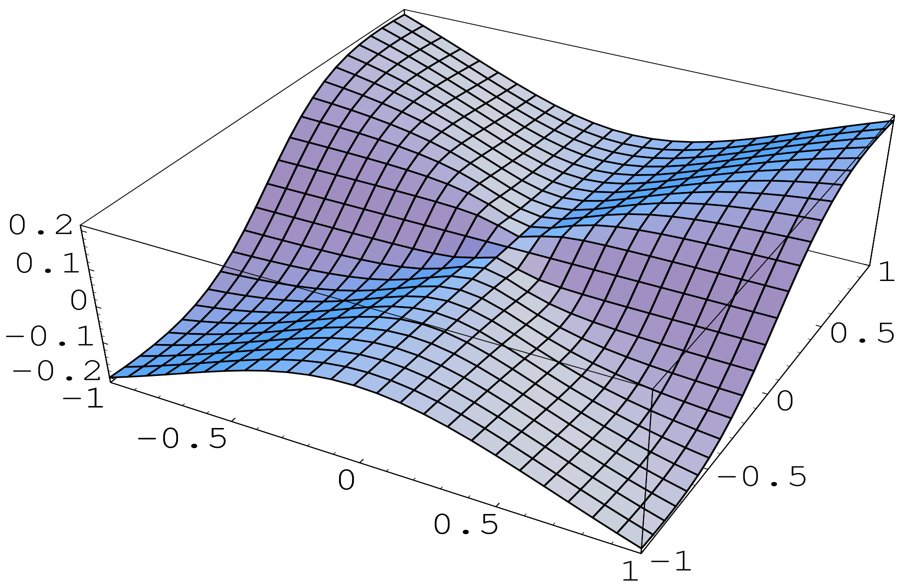

Bild 2: $\quad f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{2x^2+3y^2}$

b) Wegen der Nennernullstelle von f in $(x_0, y_0) = (0,0)$ können wir dort keine Differenzierbarkeit voraussetzen, d.h. die partiellen Ableitungen müssen elementar über die Definition berechnet werden.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^2\cdot 0}{2t^2+3\cdot 0^2} - 0}{t} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{0^2\cdot t}{2\cdot 0^2+3t^2} - 0}{t} = 0$$

c) Wäre f im Punkt $(x_0, y_0) = (0,0)$ (vollständig) differenzierbar, so würde eine lineare Abbildung $\boldsymbol{A}$ existieren, mit

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{0}} \frac{f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{0}) - \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}}{||\,\boldsymbol{x}\,||} = 0\,.$$

$\boldsymbol{A}$ wäre dann die Jacobi-Matrix

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{J}\,f(0,0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right) = (0,0)\,.$$

Damit ergibt sich beispielsweise für die Nullfolge $\boldsymbol{x}_n = (1/n, 1/n)^T$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(\boldsymbol{x}_n) - f(\boldsymbol{0}) - \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}_n}{||\,\boldsymbol{x}_n||} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n^3}{5/n^2\sqrt{2/n^2}} = \frac{1}{5\sqrt{2}}\,.$$

Also ist f im Nullpunkt nicht differenzierbar.

Abgabetermin: 10.11.2023