Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2023/24**
Prof. Dr. J. Struckmeier
Dr. K. Rothe

Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Präsenzblatt 1, Lösungen

Aufgabe 1:

Man berechne die Gradienten für folgende Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

a) $f(x,y) = x^2 + 4y^2$, b) $f(x,y) = x^2 - 4y$, c) $f(x,y) = x^2 - 4y^2$,
d) $f(x,y) = x - 4y$

und zeichne ein Bild im Bereich $[-2,2] \times [-2,2]$, auf dem verschiedene Höhenlinien der Funktion angegeben sind. Dies sind Linien, für die $f(x,y) = c$ mit $c \in \mathbb{R}$ gilt.

Lösung:

a) $f(x,y) = x^2 + 4y^2 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{grad} f(x,y) = (2x, 8y)$

Der MATLAB-Befehl für den Höhenlinienplot lautet:

```
ezcontour('x^2 + 4*y^2',[-2,2,-2,2])
```

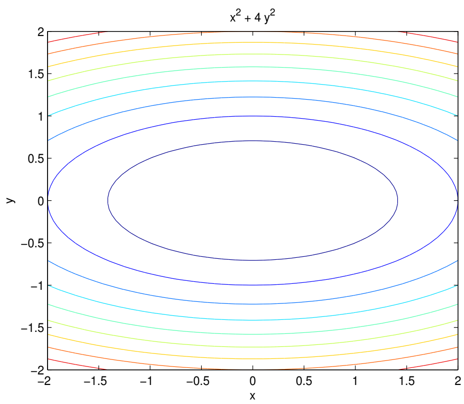

Bild 1 a) $x^2 + 4y^2 = c$ mit $c \in \mathbb{R}$

b) $f(x,y) = x^2 - 4y \quad \Rightarrow \quad \operatorname{grad} f(x,y) = (2x, -4)$

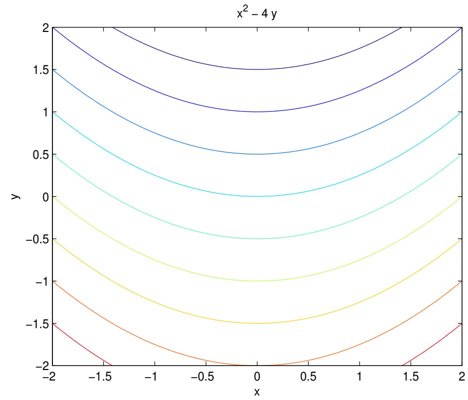

Bild 1 b) $x^2 - 4y = c$ mit $c \in \mathbb{R}$

c) $f(x,y) = x^2 - 4y^2 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{grad} f(x,y) = (2x, -8y)$

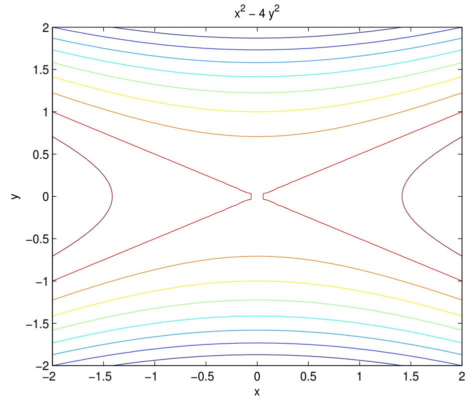

Bild 1 c) $x^2 - 4y^2 = c$ mit $c \in \mathbb{R}$

d) $f(x,y) = x - 4y \quad \Rightarrow \quad \operatorname{grad} f(x,y) = (1, -4)$

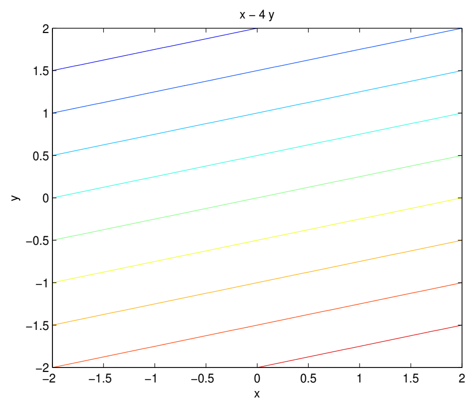

Bild 1 d) $x - 4y = c$ mit $c \in \mathbb{R}$

Aufgabe 2:

a) Man zeige, dass die Wellengleichung $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ für eine Ortsvariable x und mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$ von der Funktion

$$u(x,t) = 2\sin(x+ct) + 3e^{x-ct}$$

gelöst wird.

b) Man zeige, dass die Funktion

$$u(x,y) = e^{-x}\sin y + (x+5)(y-6)$$

die Laplace-Gleichung $\Delta u = 0$ löst.

Lösung:

a) $u(x,t) = 2\sin(x+ct) + 3e^{x-ct}$

$u_t(x,t) = 2c\cos(x+ct) - 3ce^{x-ct}$,

$u_x(x,t) = 2\cos(x+ct) + 3e^{x-ct}$,

$u_{tt}(x,t) = -2c^2\sin(x+ct) + 3c^2e^{x-ct}$,

$u_{xx}(x,t) = -2\sin(x+ct) + 3e^{x-ct}$,

Damit löst u die Wellengleichung $u_{tt} = c^2\Delta u$.

b) $u(x,y) = e^{-x}\sin y + (x+5)(y-6)$

$u_x(x,y) = -e^{-x}\sin y + y - 6$,

$u_y(x,y) = e^{-x}\cos y + x + 5$

$u_{xx}(x,y) = e^{-x}\sin y$,

$u_{yy}(x,y) = -e^{-x}\sin y$

Damit löst u die Laplace-Gleichung $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$.

Besprechungstermine: 23.10. - 27.10.23