Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2023/24**
Prof. Dr. J. Struckmeier
Dr. K. Rothe

Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Hausaufgabenblatt 1, Lösungen

Aufgabe 1:

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = 5x^2 - 3y^2$.

a) Man berechne von f alle partiellen Ableitungen bis zur 3. Ordnung.

b) Man visualisiere den Graph von f über dem Parametergebiet $[-3, 3] \times [-4, 4]$.

c) Die Tangentialebene an den Graphen einer differenzierbaren Funktion f im Punkt $(x_0, y_0) \in D \subset \mathbb{R}^2$ wird beschrieben durch

$$z = z(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Man bestimme die Tangentialebene für das gegebene f im Punkt $(x_0, y_0) = (3, -4)$.

d) Man gebe eine Parameterdarstellung der Höhenlinie von f an, die durch den Punkt $(3, -4)$ läuft.

e) Man berechne den Winkel α zwischen $\operatorname{grad} f(3, -4)$ und der Tangentialrichtung der Höhenlinie von f im Punkt $(3, -4)$.

Lösung:

a) $f(x, y) = 5x^2 - 3y^2$, $\quad f_x(x, y) = 10x$, $\quad f_y(x, y) = -6y$,

$f_{xx}(x, y) = 10$, $\quad f_{xy}(x, y) = 0$, $\quad f_{yy}(x, y) = -6$,

$f_{xxx}(x, y) = 0$, $\quad f_{xxy}(x, y) = 0$, $\quad f_{xyy}(x, y) = 0$, $\quad f_{yyy}(x, y) = 0$

b) Ein MATLAB-Befehl für den Flächenplot lautet:

```
ezsurf('5*x^2-3*y^2',[-3,3,-4,4])
```

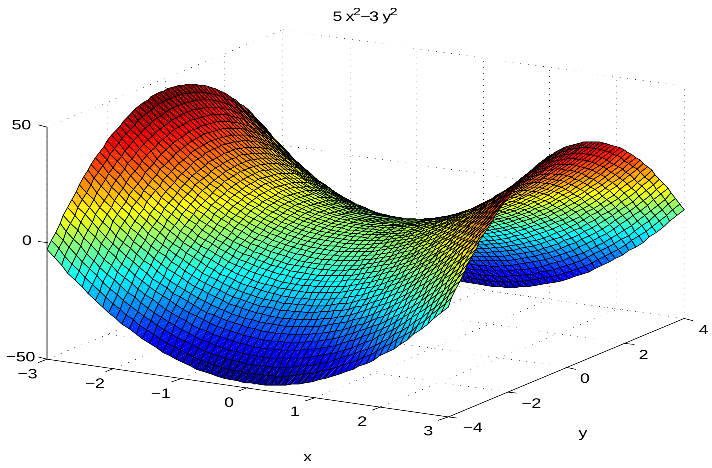

Bild 1 $\quad f(x,y) = 5x^2 - 3y^2$

c) $f(3,-4) = 5 \cdot 3^2 - 3(-4)^2 = -3\,, \quad f_x(3,-4) = 30\,, \quad f_y(3,-4) = 24$

Tangentialebene : $\quad z = -3 + 30(x-3) + 24(y+4)$

d) Es ist $f(3,-4) = -3$. Damit wird die Höhenlinie im Punkt $(3,-4)$ beschrieben durch die implizite Gleichung

$$-3 = f(x, y(x)) = 5x^2 - 3y^2(x)\,.$$

Man erhält durch Auflösen $y(x) = \pm\sqrt{5x^2/3 + 1}$.

Wegen $y(3) = -4$ kommt nur $y(x) = -\sqrt{5x^2/3+1}$ in Frage.

Eine die Höhenlinie parametrisierende Kurve ist daher gegeben durch

$$\mathbf{c}(x) = \begin{pmatrix} x \\ y(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -\sqrt{5x^2/3+1} \end{pmatrix}.$$

e) $\operatorname{grad} f(3,-4) = (f_x(3,-4), f_y(3,-4)) = (30, 24)$

Tangentialrichtung der Höhenlinie

$$\mathbf{c}'(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\dfrac{10x}{6\sqrt{5x^2/3+1}} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{c}'(3) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\dfrac{30}{24} \end{pmatrix}$$

$$\cos\alpha = \frac{\operatorname{grad} f(3,-4) \cdot \mathbf{c}'(3)}{||\operatorname{grad} f(3,-4)||_2 \, ||\mathbf{c}'(3)||_2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 90^\circ$$

Aufgabe 2:

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^4+y^4} & \text{, falls } \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{, falls } \quad (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

a) Man überprüfe, ob f im Nullpunkt stetig ist.

b) Man visualisiere den Graph von f über dem Parametergebiet $[-1,1] \times [-1,1]$.

c) Man berechne die ersten partiellen Ableitungen von f und

d) überprüfe, ob diese im Nullpunkt stetig sind.

Lösung:

a) Man betrachte die Nullfolge $\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right)$ mit $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\lim_{k\to\infty} f\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) = \lim_{k\to\infty} \frac{1/k^4}{2/k^4} = \frac{1}{2} \neq 0\,.$$

Die Funktion f ist im Nullpunkt daher nicht stetig.

b)

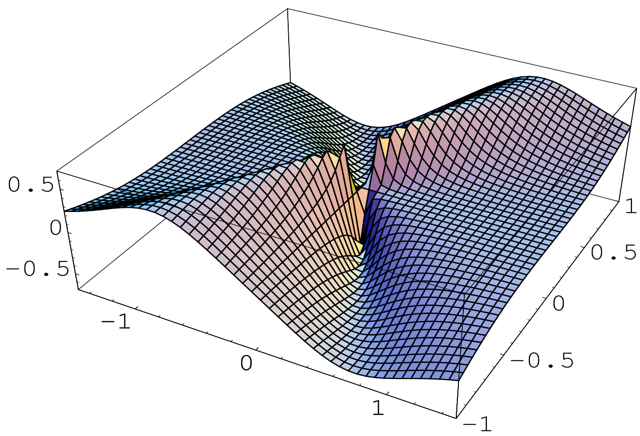

Bild 2: $\quad f(x,y) = \dfrac{xy^3}{x^4+y^4}$

c) Für $(x,y) \neq (0,0)$ gilt:

$$f_x(x,y) = \frac{-3x^4y^3 + y^7}{(x^4+y^4)^2}\,, \qquad f_y(x,y) = \frac{3x^5y^2 - xy^6}{(x^4+y^4)^2}$$

für $(x, y) = (0, 0)$ gilt:

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0\,,$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

d) Man betrachte die Nullfolge $\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right)$ mit $k \in \mathbb{N}$ um zu überprüfen, ob die partiellen Ableitungen im Nullpunkt stetig sind.

$$\lim_{k\to\infty} f_x\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) = \lim_{k\to\infty} \frac{-3/k^7 + 1/k^7}{(1/k^4 + 1/k^4)^2} = \lim_{k\to\infty} \frac{-k}{2} = -\infty$$

$$\lim_{k\to\infty} f_y\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) = \lim_{k\to\infty} \frac{3/k^7 - 1/k^7}{(1/k^4 + 1/k^4)^2} = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{2} = \infty$$

Damit sind die partiellen Ableitungen im Nullpunkt nicht stetig.

Abgabetermin: 27.10.23