Aufgabe 1: (2+2 Punkte)

Gegeben sei die Funktion f mit

$$f(x,y) = x^2 - \cos(y)e^{x-1}.$$

a) Man berechne für die Funktion f

   (i) den Gradienten und

   (ii) die Hessematrix.

b) Man bestimme das Taylor-Polynom 2. Grades für die Funktion f im Entwicklungspunkt $(x_0, y_0) = (1, 0)$.

Lösung:

a) (2 Punkte)

   (i) grad $f(x,y) = (f_x(x,y), f_y(x,y)) = (2x - \cos(y)e^{x-1}, \sin(y)e^{x-1})$

   (ii) Hess $f(x,y) = \begin{pmatrix} 2-\cos(y)e^{x-1} & \sin(y)e^{x-1} \\ \sin(y)e^{x-1} & \cos(y)e^{x-1} \end{pmatrix}$

b) (2 Punkte)

   $f(1,0) = 0,\ f_x(1,0) = 1,\ f_y(1,0) = 0$

   $f_{xx}(1,0) = 1,\ f_{xy}(1,0) = 0,\ f_{yy}(1,0) = 1$

$$\begin{aligned} T_2(x,y;1,0) &= f(1,0) + f_x(1,0)(x-1) + f_y(1,0)\,y \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(f_{xx}(1,0)(x-1)^2 + 2f_{xy}(1,0)(x-1)y + f_{yy}(1,0)\,y^2\right) \\ &= x - 1 + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{y^2}{2} \end{aligned}$$

   Alternative:

   $x^2 - \cos(y)e^{x-1}$

   $= (x-1)^2 + 2(x-1) + 1 - \left(1 - \frac{y^2}{2} \pm \ldots\right)\left(1 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2} \pm \ldots\right)$

   $= \underbrace{x - 1 + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{y^2}{2}}_{=T_2(x,y;1,0)} \pm \ldots$

Aufgabe 2: (1+3+1 Punkte)

Es sollen die Extremwerte der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f(x, y) = x^2 + y^2$$

unter der Nebenbedingung $g(x, y) = 9x^2 + 4y^2 - 36 = 0$ mit Hilfe der Lagrangeschen Multiplikatorenregel berechnet werden.

a) Man überprüfe die Regularitätsbedingung für g.

b) Man berechne die Extremalkandidaten unter Verwendung der Lagrangeschen Multiplikatorenregel und

c) klassifiziere sie.

Lösung:

a) (1 Punkt)

Regularitätsbedingung:

$\boldsymbol{J}g(x, y) = \text{grad } g(x, y)^T = (18x, 8y) = (0, 0) \;\Rightarrow\; (x, y) = (0, 0)$

Es gilt $g(0, 0) = -36$. Der Punkt $(0, 0)$ liegt also nicht auf der Ellipse $g = 0$. Daher erfüllen alle zulässigen Punkte die Regularitätsbedingung $\text{Rang}(\boldsymbol{J}g(x, y)) = 1$.

b) (3 Punkte)

Lagrange-Multiplikatorenregel:

$$\begin{pmatrix} \nabla f(x, y) + \lambda \nabla g(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 18\lambda x \\ 2y + 8\lambda y \\ 9x^2 + 4y^2 - 36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. Gleichung:
1.Fall: $x = 0 \;\Rightarrow\; g(0, y) = 4y^2 - 36 = 0 \;\Rightarrow\; y_1 = 3,\; y_2 = -3$

Extremalkandidaten: $P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

2.Fall: $\lambda = -\dfrac{1}{9} \overset{2.\text{Gl.}}{\Rightarrow} y = 0 \;\Rightarrow\; g(x, 0) = 9x^2 - 36 = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = 2\,,\; x_2 = -2$

Extremalkandidaten: $P_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $P_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) (1 Punkt)

Da die Ellipse $g = 0$ kompakt und f stetig ist, nimmt f auf $g = 0$ absolutes Maximum und Minimum an.

$P_{1,2}$ sind absolutes Maxima und $P_{3,4}$ absolute Minima, denn

$$f(P_{1,2}) = 9\,, \quad f(P_{3,4}) = 4\,.$$

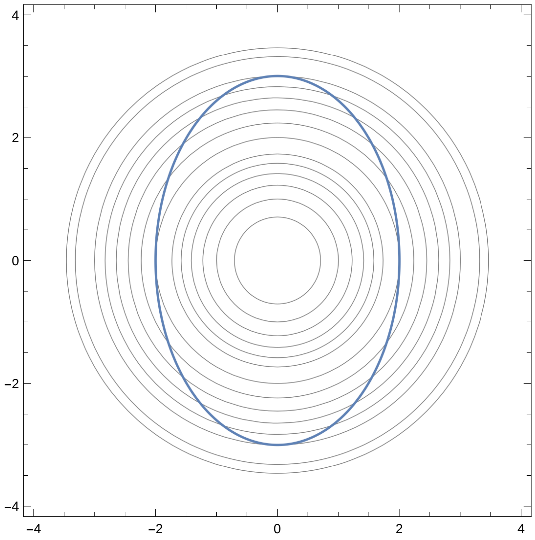

Bild 2 Nebenbedingung $g(x, y) := 9x^2 + 4y^2 - 36 = 0$ mit Höhenlinien der Funktion $f(x, y) = x^2 + y^2$ (keine Wertung)

Aufgabe 3: (3 Punkte)

Man berechne für das Vektorfeld

$$\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{f}(x,y) = \begin{pmatrix} -xy \\ y^2 \end{pmatrix}$$

das Kurvenintegral $\int_{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$. Dabei durchläuft die Kurve $\boldsymbol{c}$ den linken Halbkreis

$$H := \left\{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 9,\ x \le 0\right\}$$

in mathematisch positiver Richtung.

Lösung:

Die Kurve $\boldsymbol{c}$ wird parametisiert durch $\boldsymbol{c}(t) = \begin{pmatrix} 3\cos(t) \\ 3\sin(t) \end{pmatrix}$, $\dfrac{\pi}{2} \le t \le \dfrac{3\pi}{2}$.

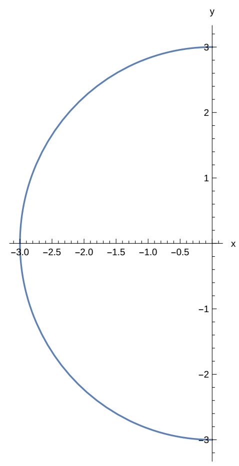

Bild 3 linker Halbkreis, Radius $r = 3$ (keine Wertung)

Berechnung des Kurvenintegrals mit dem Tangentialvektor $\dot{\boldsymbol{c}}(t) = \begin{pmatrix} -3\sin(t) \\ 3\cos(t) \end{pmatrix}$.

$$\int\limits_{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} = \int\limits_{\pi/2}^{3\pi/2} \langle \boldsymbol{f}(\boldsymbol{c}(t)), \dot{\boldsymbol{c}}(t)\rangle\ dt = \int\limits_{\pi/2}^{3\pi/2} \left\langle \begin{pmatrix} -9\cos(t)\sin(t) \\ 9\sin^2(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3\sin(t) \\ 3\cos(t) \end{pmatrix} \right\rangle dt$$

$$= 18 \int\limits_{\pi/2}^{3\pi/2} 3\cos(t)\sin(t)^2\,dt \overset{subst.}{=} 18\left(\sin^3(t)\right)\Big|_{\pi/2}^{3\pi/2} = -36$$

Aufgabe 4: (1+3 Punkte)

Gegeben sei das Vektorfeld $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\boldsymbol{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} e^z \\ 4z - 2\sin(y) \\ xe^z + 4y + 1 \end{pmatrix}.$$

a) Man weise die Existenz eines Potentials zu $\boldsymbol{f}$ nach, ohne es zu berechnen.

b) Man berechne ein Potential von $\boldsymbol{f}$.

Lösung:

a) Der $\mathbb{R}^3$ ist einfach zusammenhängend und die Integrabilitätsbedingung

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} f_{3y} - f_{2z} \\ f_{1z} - f_{3x} \\ f_{2x} - f_{1y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-4 \\ e^z - e^z \\ 0-0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

ist erfüllt. Daher besitzt $\boldsymbol{f}(x,y,z)$ ein Potential $v(x,y,z)$, d.h. es gilt $\boldsymbol{f} = \mathrm{grad}v$.

b) Berechnung von v über $\mathrm{grad}v = (v_x, v_y, v_z) = \boldsymbol{f}$:

$$v_x(x,y,z) \stackrel{!}{=} e^z \quad \Rightarrow \quad v(x,y,z) = xe^z + c(y,z)$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad v_y(x,y,z) = c_y(y,z) \stackrel{!}{=} 4z - 2\sin(y) \\
&\Rightarrow \quad c(y,z) = 4yz + 2\cos(y) + k(z) \\
&\Rightarrow \quad v(x,y,z) = xe^z + 4yz + 2\cos(y) + k(z)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad v_z(x,y,z) = xe^z + 4y + k'(z) \stackrel{!}{=} xe^z + 4y + 1 \Rightarrow k'(z) = 1 \Rightarrow k(z) = z + K \\
&\Rightarrow \quad v(x,y,z) = xe^z + 4yz + 2\cos(y) + z + K \quad \text{mit } K \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Alternative:

Wählt man als Kurve $\boldsymbol{k}$ die direkte Verbindungslinie vom Punkt $(0,0,0)$ zum Punkt (x,y,z), d.h. $\boldsymbol{k}(t) = t(x,y,z)^T$ mit $0 \le t \le 1$, so lässt sich ein Potential v zu $\boldsymbol{f}$ berechnen nach dem Hauptsatz für Kurvenintegrale durch

$$v(x,y,z) = \int_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} + K = \int_0^1 \boldsymbol{f}(\boldsymbol{k}(t))\dot{\boldsymbol{k}}(t)\, dt + K$$

$$= \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} e^{zt} \\ 4zt - 2\sin(yt) \\ xte^{zt} + 4yt + 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\rangle dt + K = \int_0^1 xe^{zt} + zxte^{zt} + 8yzt - 2y\sin(yt) + z\, dt + K$$

$$= \left(xte^{zt} + 4yzt^2 + 2\cos(yt) + zt\right)\Big|_0^1 + K = xe^z + 4yz + 2\cos(y) + z + \tilde{K}.$$

Aufgabe 5: (2+2 Punkte)

a) Man skizziere den durch $0 \le y$, $0 \le z$ und $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ eingeschlossenen Bereich K und stelle ihn durch Kugelkoordinaten dar.

b) Man berechne die Masse von K mit der Dichtefunktion $\rho = 8z + 3$ unter Verwendung von Kugelkoordinaten.

Lösung:

a) (2 Punkte)

$0 \le y$, $0 \le z$ und $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ beschreibt eine Viertelkugel um $(0,0,0)$ vom Radius $r = 3$.

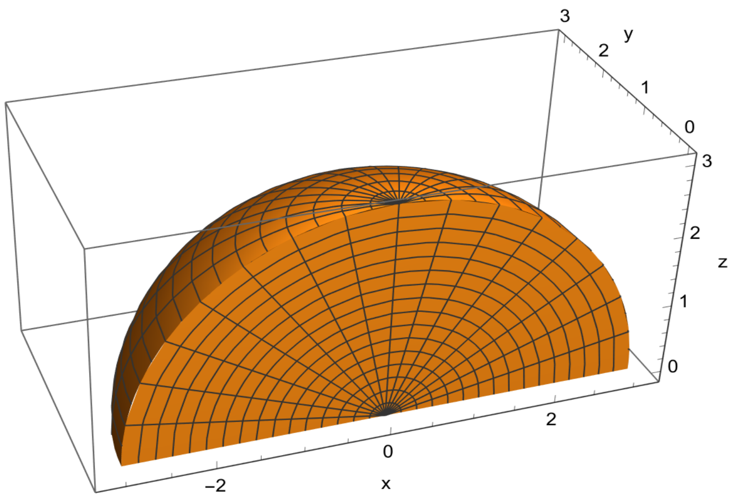

Bild 5 Viertelkugel K, Radius $r = 3$

Kugelkoordinaten mit $0 \le r \le 3,\ 0 \le \varphi \le \pi,\ 0 \le \psi \le \dfrac{\pi}{2}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi(r,\varphi,\psi) = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi)\cos(\psi) \\ r\sin(\varphi)\cos(\psi)) \\ r\sin(\psi) \end{pmatrix}$$

b) (2 Punkte)

Mit der Dicht $\rho = 8z + 3$ in Kugelkooordinaten ergibt sich die Masse von K über den Transfomationssatz

$$\begin{aligned} M &= \int_K 8z + 3\, d(x,y,z) = \int_0^3 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi} (8r\sin(\psi) + 3) r^2 \cos(\psi)\, d\varphi\, d\psi\, dr \\ &= \int_0^3 4r^3\, dr \int_0^{\pi/2} 2\sin(\psi)\cos(\psi) d\psi \int_0^{\pi} d\varphi + \int_0^3 3r^2\, dr \int_0^{\pi/2} \cos(\psi) d\psi \int_0^{\pi} d\varphi \\ &= \left(r^4\Big|_0^3\right)\left(\varphi\Big|_0^{\pi}\right)\left(\sin^2(\psi)\Big|_0^{\pi/2}\right) + \left(r^3\Big|_0^3\right)\left(\varphi\Big|_0^{\pi}\right)\left(\sin(\psi)\Big|_0^{\pi/2}\right) = (81 + 27)\pi = 108\pi \end{aligned}$$