

**Aufgabe 1:** (5 Punkte)

Man berechne alle stationären Punkte der folgenden Funktion und klassifiziere sie

$$f(x, y) = x^3 - 3x + y^3 - 12y.$$

**Lösung:**

$$\text{grad } f(x, y) = (3x^2 - 3, 3y^2 - 12)^T = (3(x^2 - 1), 3(y^2 - 4))^T = (0, 0)^T$$

Man erhält  $x = 1$  oder  $x = -1$  und  $y = 2$  oder  $y = -2$ , also insgesamt die Punkte

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, P_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

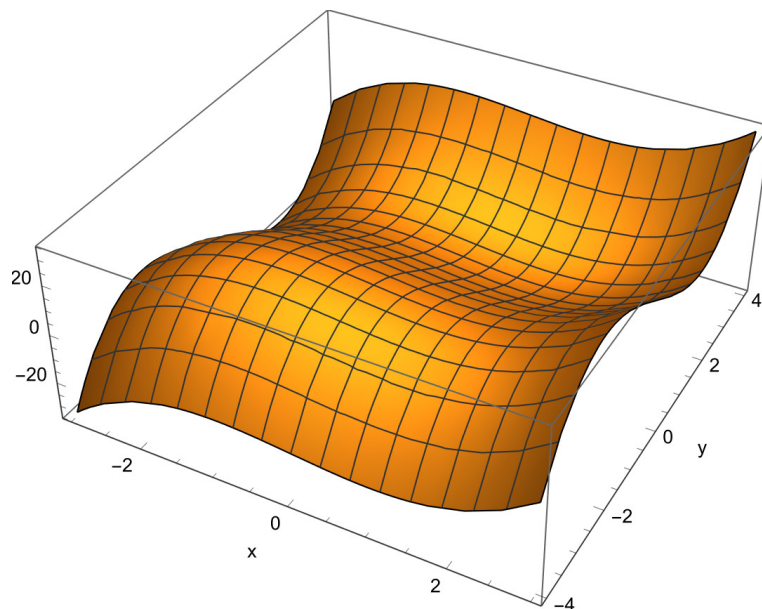
$$\text{Hess } f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}$$

$$\text{Hess } f(P_1) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{positiv definit} \Rightarrow P_1 \text{ Minimum}$$

$$\text{Hess } f(P_2) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{indefinit} \Rightarrow P_2 \text{ Sattelpunkt}$$

$$\text{Hess } f(P_3) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{indefinit} \Rightarrow P_3 \text{ Sattelpunkt}$$

$$\text{Hess } f(P_4) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{negativ definit} \Rightarrow P_4 \text{ Maximum}$$



**Bild 1**  $f(x, y) = x^3 - 3x + y^3 - 12y$  (keine Bewertung)

**Aufgabe 2:** (1+1+3 Punkte)

Durch die Niveaumenge

$$f(x, y) := 4x^2 + 9y^2 - 36y = 0$$

ist implizit eine Kurve gegeben.

- Man gebe die Symmetrien der Kurve an.
- Man bestimme den Gradienten von  $f$ .
- Man berechne die Kurvenpunkte mit horizontaler und vertikaler Tangente.

**LÖsung:**

- (1 Punkt) Die Kurve ist symmetrisch zur  $y$ -Achse, denn

$$f(-x, y) = 4(-x)^2 + 9y^2 - 36y = 4x^2 + 9y^2 - 36y = f(x, y).$$

- (1 Punkt)

$$\text{grad } f(x, y) = (f_x(x, y), f_y(x, y)) = (8x, 18y - 36)$$

- (3 Punkte)

- Kurvenpunkte mit horizontaler Tangente ergeben sich aus den Bedingungen

$$f_x(x, y) = 0 \quad \wedge \quad f(x, y) = 0 \quad \wedge \quad f_y(x, y) \neq 0.$$

$$0 = f_x(x, y) = 8x \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

$$\Rightarrow \quad 0 = f(0, y) = 9y^2 - 36y = 9y(y - 4) \quad \Rightarrow \quad y = 0 \vee y = 4$$

$$\Rightarrow \quad P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Es gilt  $f_y(0, 0) = -36 \neq 0$  und  $f_y(0, 4) = 36 \neq 0$ .

- Kurvenpunkte mit vertikaler Tangente ergeben sich aus den Bedingungen

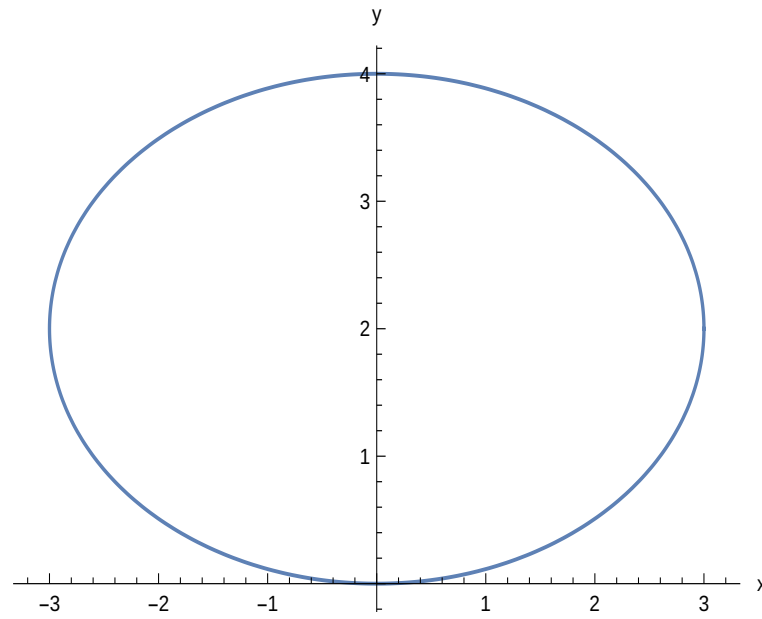
$$f_y(x, y) = 0 \quad \wedge \quad f(x, y) = 0 \quad \wedge \quad f_x(x, y) \neq 0.$$

$$0 = f_y(x, y) = 18y - 36 \quad \Rightarrow \quad y = 2$$

$$\Rightarrow \quad 0 = f(x, 2) = 4x^2 + 9 \cdot 2^2 - 72 = 4x^2 - 36 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 3 \vee x_2 = -3$$

$$\Rightarrow \quad P_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad P_4 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Es gilt  $f_x(\pm 3, 2) = \pm 24 \neq 0$ .



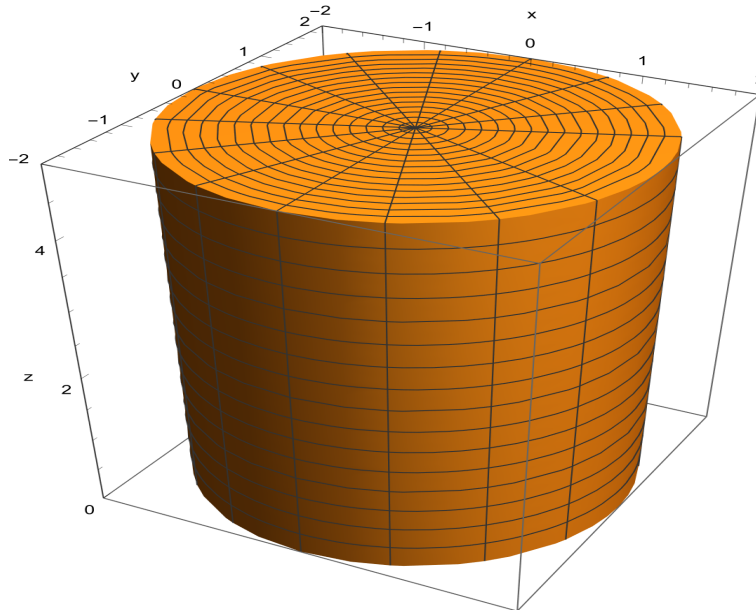
**Bild 2** Ellipse  $\frac{x^2}{3^2} + \frac{(y-2)^2}{2^2} = 1 \Leftrightarrow 4x^2 + 9y^2 - 36y = 0$ .

**Aufgabe 3:** (2+2 Punkte)

- a) Man skizziere den durch  $0 \leq z \leq 5$  und  $x^2 + y^2 \leq 4$  beschriebenen Bereich  $Z$  und stelle ihn durch Zylinderkoordinaten dar.
- b) Mit der Dichte  $\rho(x, y, z) = 2z + 1$  berechne man für  $Z$  das Trägheitsmoment bezüglich der  $z$ -Achse unter Verwendung von Zylinderkoordinaten.

**Lösung:**

- a) (2 Punkte)

**Bild 3** Zylinder  $Z$ , Radius  $r = 2$ , Höhe  $h = 5$ 

Zylinderkoordinaten mit  $0 \leq r \leq 2$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ,  $0 \leq z \leq 5$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi(r, \varphi, \psi) = \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \\ r \sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}$$

- b) (2 Punkte)

Berechnung des Trägheitsmoments über den Transformationssatz

$$\begin{aligned} \Theta_{z\text{-Achse}} &= \int_Z \rho(x, y, z) r^2(x, y, z) d(x, y, z) = \int_Z (2z + 1)(x^2 + y^2) d(x, y, z) \\ &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^5 (2z + 1) \cdot r^2 \cdot r dz d\varphi dr = \int_0^2 r^3 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^5 2z + 1 dz \\ &= \left( \frac{r^4}{4} \Big|_0^2 \right) \left( \varphi \Big|_0^{2\pi} \right) \left( z^2 + z \Big|_0^5 \right) = \frac{2^4}{4} \cdot 2\pi \cdot 30 = 240\pi \end{aligned}$$

**Aufgabe 4:** (1+1+3+1 Punkte)

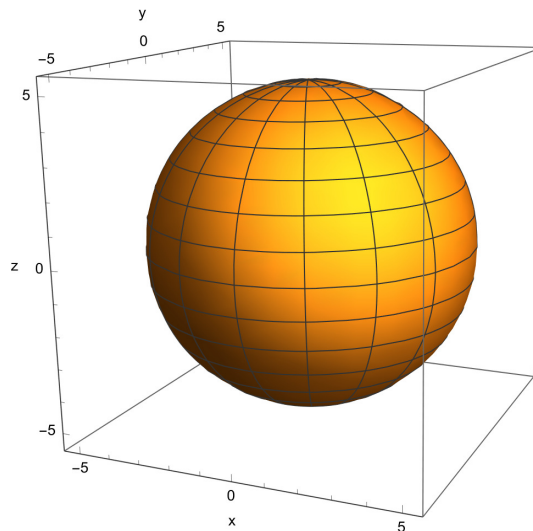
Gegeben seien das Vektorfeld  $\mathbf{f}(x, y, z) = (0, 0, z)^T$  und der Körper

$$K = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 25\}.$$

- Man skizziere  $K$ .
- Für die Oberfläche  $S$  des Körpers  $K$  gebe man eine Parametrisierung an.
- Man berechne den Fluss von  $\mathbf{f}$  durch die Oberfläche  $S$  unter Verwendung der Parametrisierung aus b).
- Man bestimme das Volumenintegral  $\int_K \operatorname{div} \mathbf{f}(x, y, z) d(x, y, z)$ .

**Lösung:**

- (1 Punkt)



**Bild 4** Kugel  $K$ , Radius  $r = 5$

- (1 Punkte)

Parametrisierung der Kugeloberfläche  $S$ :  $\mathbf{q} : [0, 2\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit

$$\mathbf{q}(\varphi, \psi) = \begin{pmatrix} 5 \cos(\varphi) \cos(\psi) \\ 5 \sin(\varphi) \cos(\psi) \\ 5 \sin(\psi) \end{pmatrix}$$

- (3 Punkte)

Fluss durch  $S$ , mit der äußeren Normalen

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \psi} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ -5 \sin(\varphi) \cos(\psi) & 5 \cos(\varphi) \cos(\psi) & 0 \\ -5 \cos(\varphi) \sin(\psi) & -5 \sin(\varphi) \sin(\psi) & 5 \cos(\psi) \end{vmatrix} = 25 \cos(\psi) \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \cos(\psi) \\ \sin(\varphi) \cos(\psi) \\ \sin(\psi) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{f} \, do &= \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 25 \cos(\psi) \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \sin(\psi) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \cos(\psi) \\ \sin(\varphi) \cos(\psi) \\ \sin(\psi) \end{pmatrix} \right\rangle d\psi d\varphi \\ &= 125 \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2(\psi) \cos(\psi) d\psi d\varphi = 125 \left( \varphi \Big|_0^{2\pi} \right) \left( \frac{\sin^3(\psi)}{3} \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \right) = \frac{500\pi}{3} \end{aligned}$$

d) (1 Punkt)

Mit dem Gaußschen-Integralsatz erhält man:

$$\int_K \operatorname{div} \mathbf{f} \, d(x, y, z) = \int_S \mathbf{f} \, do = \frac{500\pi}{3}$$

Alternativ: direkte Berechnung über Kugelkoordinaten mit  $\operatorname{div} \mathbf{f}(x, y, z) = 1$

$$\begin{aligned} \int_K \operatorname{div} \mathbf{f}(x, y, z) \, d(x, y, z) &= \int_K d(x, y, z) \\ &= \int_0^5 \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2 \cos(\psi) \, d\psi d\varphi dr = \int_0^5 r^2 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(\psi) \, d\psi \\ &= \frac{r^3}{3} \Big|_0^5 \cdot \varphi \Big|_0^{2\pi} \cdot \sin(\psi) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{500\pi}{3} \end{aligned}$$

Alternativ:

direkte Berechnung mit  $\operatorname{div} \mathbf{f}(x, y, z) = 1$  und Kugelvolumen  $V = \frac{4\pi r^3}{3}$

$$\int_K \operatorname{div} \mathbf{f}(x, y, z) \, d(x, y, z) = \int_K d(x, y, z) = \frac{4\pi 5^3}{3} = \frac{500\pi}{3}$$