Aufgabe 1: (2+2 Punkte)

Gegeben sei die Funktion f mit

$$f(x,y) = y\cos(x) + xe^{y+1}.$$

a) Man berechne für die Funktion f

   (i) den Gradienten und

   (ii) die Hessematrix.

b) Man bestimme das Taylor-Polynom 2. Grades für die Funktion f im Entwicklungspunkt $(x_0, y_0) = (0, -1)$

Lösung:

a) (2 Punkte)

   (i) grad $f(x,y) = (f_x(x,y), f_y(x,y)) = (-y\sin(x) + e^{y+1}, \cos(x) + xe^{y+1})$

   (ii) Hess $f(x,y) = \begin{pmatrix} -y\cos(x) & -\sin(x) + e^{y+1} \\ -\sin(x) + e^{y+1} & xe^{y+1} \end{pmatrix}$

b) (2 Punkte)

$f(0,-1) = -1,\ f_x(0,-1) = 1,\ f_y(0,-1) = 1$

$f_{xx}(0,-1) = 1,\ f_{xy}(0,-1) = 1,\ f_{yy}(0,-1) = 0$

$$\begin{aligned} T_2(x,y;0,-1) &= f(0,-1) + f_x(0,-1)\,x + f_y(0,-1)\,(y+1) \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(f_{xx}(0,-1)\,x^2 + 2f_{xy}(0,-1)\,x(y+1) + f_{yy}(0,-1)\,(y+1)^2\right) \\ &= -1 + x + (y+1) + \frac{x^2}{2} + x(y+1) \end{aligned}$$

Aufgabe 2: (1+3+1 Punkte)

Es sollen die Extremwerte der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f(x,y) = 2y^2 - 1$$

unter der Nebenbedingung $g(x,y) = x^2 + 4y^2 - 4 = 0$ mit Hilfe der Lagrangeschen Multiplikatorenregel berechnet werden.

a) Man überprüfe die Regularitätsbedingung für g.

b) Man berechne die Extremalkandidaten unter Verwendung der Lagrangeschen Multiplikatorenregel und

c) klassifiziere sie.

Lösung:

a) (1 Punkt)

Regularitätsbedingung:

$\boldsymbol{J}g(x,y) = \text{grad } g(x,y)^T = (2x, 8y) = (0,0) \ \Rightarrow \ (x,y) = (0,0)$

Es gilt $g(0,0) = -4$. Der Punkt $(0,0)$ liegt also nicht auf der Ellipse $g = 0$. Daher erfüllen alle zulässigen Punkte die Regularitätsbedingung $\text{Rang}(\boldsymbol{J}g(x,y)) = 1$.

b) (3 Punkte)

Lagrange-Multiplikatorenregel:

$$\begin{pmatrix} \nabla f(x,y) + \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda x \\ 4y + \lambda 8y \\ x^2 + 4y^2 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. Gleichung:
1.Fall: $\lambda = 0 \ \Rightarrow \ y = 0 \ \Rightarrow \ g(x,0) = x^2 - 4 = 0 \ \Rightarrow \ x_1 = 2\,,\ x_2 = -2$

Extremalkandidaten: $P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

2.Fall: $x = 0 \ \Rightarrow \ g(0,y) = 4y^2 - 4 = 0 \ \Rightarrow \ y_1 = 1,\ y_2 = -1$

Extremalkandidaten: $P_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $P_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

c) (1 Punkt)

Da die Ellipse $g = 0$ kompakt und f stetig ist, nimmt f nimmt auf $g = 0$ absolutes Maximum und Minimum an.

$P_{1,2}$ sind absolutes Minima und $P_{3,4}$ absolute Maximum, denn

$$f(P_{1,2}) = -1\,, \quad f(P_{3,4}) = 1\,.$$

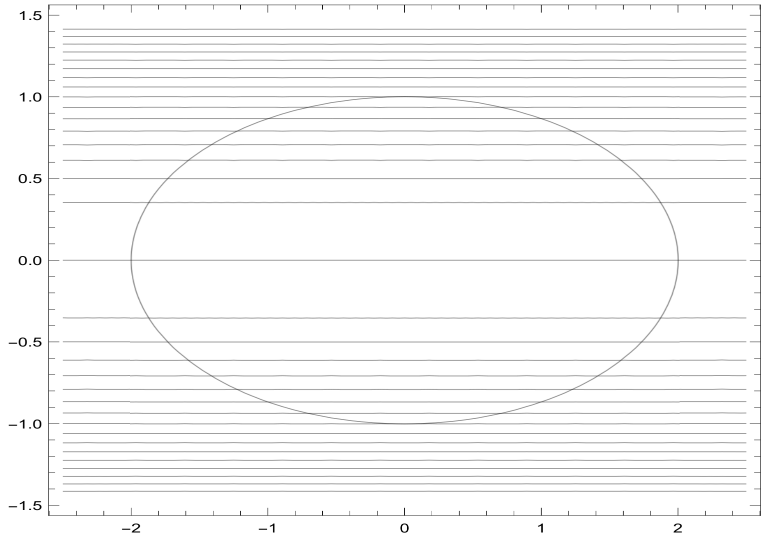

Bild 2 Nebenbedingung $g(x, y) := x^2 + 4y^2 - 4 = 0$ mit Höhenlinien der Funktion $f(x, y) = 2y^2 - 1$

Aufgabe 3: (3 Punkte)

Man berechne für das Vektorfeld

$$\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{f}(x,y) = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$$

das Kurvenintegral $\int_{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}$. Dabei durchläuft die Kurve $\boldsymbol{c}$ den oberen Viertelkreis

$$H := \left\{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 25,\ 0 \le x,\ 0 \le y\right\}$$

in mathematisch positiver Richtung.

Lösung:

Die Kurve $\boldsymbol{c}$ wird parametisiert durch $\quad \boldsymbol{c}(t) = \begin{pmatrix} 5\cos(t) \\ 5\sin(t) \end{pmatrix}$, $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$.

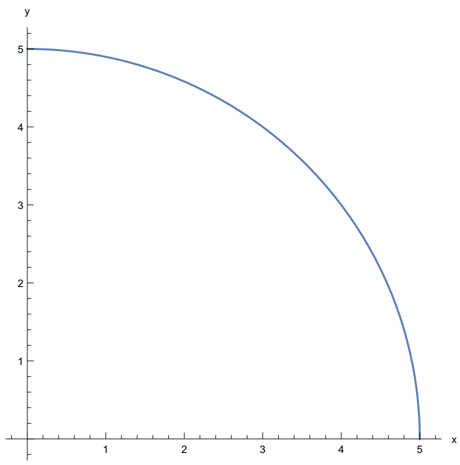

Bild 3 oberer Viertelkreis

Berechnung des Kurvenintegrals mit dem Tangentialvektor $\dot{\boldsymbol{c}}(t) = \begin{pmatrix} -5\sin(t) \\ 5\cos(t) \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
\int_{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} \quad &= \quad \int_0^{\pi/2} \langle \boldsymbol{f}(\boldsymbol{c}(t)), \dot{\boldsymbol{c}}(t)\rangle\, dt \;=\; \int_0^{\pi/2} \left\langle \begin{pmatrix} -5\cos(t) \\ 5\sin(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5\sin(t) \\ 5\cos(t) \end{pmatrix} \right\rangle dt \\
\text{(Substitutionsregel)} \quad &= \quad 25 \int_0^{\pi/2} 2\cos(t)\sin(t)\, dt \;=\; \left(25\sin^2(t)\right)\Big|_0^{\pi/2} = 25 \\
\text{(Additionstheorem)} \quad &= \quad 25 \int_0^{\pi/2} \underbrace{2\cos(t)\sin(t)}_{=\sin(2t)}\, dt \;=\; \left(-\frac{25}{2}\cos(2t)\right)\Big|_0^{\pi/2} = 25
\end{aligned}$$

Aufgabe 4: (1+3 Punkte)

Gegeben sei das Vektorfeld $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\boldsymbol{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} ye^x + 2xy + 3\cos(x) \\ e^x - z^2\sin(y) + x^2 \\ 2z\cos(y) + 2 \end{pmatrix}.$$

a) Man weise die Existenz eines Potentials zu $\boldsymbol{f}$ nach, ohne es zu berechnen.

b) Man berechne ein Potential von $\boldsymbol{f}$.

Lösung:

a) Der $\mathbb{R}^3$ ist einfach zusammenhängend und die Integrabilitätsbedingung

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} f_{3y} - f_{2z} \\ f_{1z} - f_{3x} \\ f_{2x} - f_{1y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2z\sin(y) - (-2z\sin(y)) \\ 0 - 0 \\ e^x + 2x - (e^x + 2x) \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

ist erfüllt. Daher besitzt $\boldsymbol{f}(x,y,z)$ ein Potential $v(x,y,z)$, d.h. es gilt $\boldsymbol{f} = \operatorname{grad} v = (v_x, v_y, v_z)$.

b) $v_x(x,y,z) = ye^x + 2xy + 3\cos(x)$

$\Rightarrow \quad v(x,y,z) = ye^x + x^2y + 3\sin(x) + c(y,z)$

$\Rightarrow \quad v_y(x,y,z) = e^x + x^2 + c_y(y,z) \stackrel{!}{=} e^x - z^2\sin(y) + x^2$

$\Rightarrow \quad c_y(y,z) = -z^2\sin(y) \quad \Rightarrow \quad c(y,z) = z^2\cos(y) + k(z)$

$\Rightarrow \quad v(x,y,z) = ye^x + x^2y + 3\sin(x) + z^2\cos(y) + k(z)$

$\Rightarrow \quad v_z(x,y,z) = 2z\cos(y) + k'(z) \stackrel{!}{=} 2z\cos(y) + 2$

$\Rightarrow \quad k'(z) = 2 \quad \Rightarrow \quad k(z) = 2z + K \quad$ mit $K \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \quad v(x,y,z) = ye^x + x^2y + 3\sin(x) + z^2\cos(y) + 2z + K$

Alternative:

Wählt man als Kurve $\boldsymbol{k}$ die direkte Verbindungslinie vom Punkt $(0,0,0)$ zum Punkt (x,y,z), d.h. $\boldsymbol{k}(t) = t(x,y,z)^T$ mit $0 \le t \le 1$, so lässt sich ein Potential v zu $\boldsymbol{f}$ berechnen nach dem Hauptsatz für Kurvenintegrale durch

$$v(x,y,z) = \int_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} + K = \int_0^1 \boldsymbol{f}(\boldsymbol{k}(t))\dot{\boldsymbol{k}}(t)\, dt + K$$

$$= \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} yte^{xt} + 2xyt^2 + 3\cos(xt) \\ e^{xt} - z^2t^2\sin(yt) + x^2t^2 \\ 2zt\cos(yt) + 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\rangle dt + K$$

$$= \int_0^1 xyte^{xt} + 2x^2yt^2 + 3x\cos(xt) + ye^{xt} - yz^2t^2\sin(yt) + x^2yt^2 + 2z^2t\cos(yt) + 2z\,dt + K$$
$$= \int_0^1 (1+xt)\,ye^{xt} + 3x^2yt^2 + 3x\cos(xt) + z^2\left(2t\cos(yt) - yt^2\sin(yt)\right) + 2z\,dt + K$$
$$= \left(yte^{xt} + x^2yt^3 + 3\sin(xt) + z^2t^2\cos(yt) + 2zt\right)\Big|_0^1 + K$$
$$= ye^x + x^2y + 3\sin(x) + z^2\cos(y) + 2z + K$$

Aufgabe 5: (2+2 Punkte)

a) Man skizziere den durch $0 \leq z$ und $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ eingeschlossenen Bereich K und stelle ihn durch Kugelkoordinaten dar.

b) Man berechne die Masse von K mit der Dichtefunktion $\rho = 1 + x^2 + y^2 + z^2$ unter Verwendung von Kugelkoordinaten.

Lösung:

a) (2 Punkte)
$0 \leq z$ und $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ beschreibt die obere Halbkugel um $(0,0,0)$ vom Radius $r = 1$.

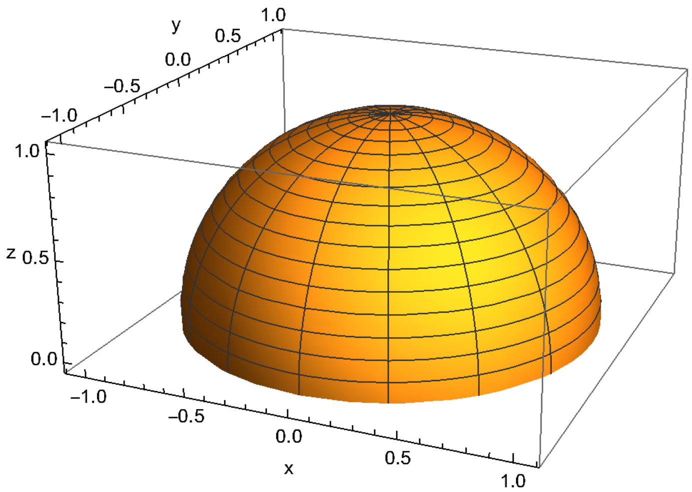

Bild 5 Halbkugel K

Kugelkoordinaten mit $0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi,\ 0 \leq \psi \leq \dfrac{\pi}{2}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi(r,\varphi,\psi) = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi)\cos(\psi) \\ r\sin(\varphi)\cos(\psi)) \\ r\sin(\psi) \end{pmatrix}$$

b) (2 Punkte)
Mit der Dicht $\rho = 1 + r^2$ in Kugelkooordinaten ergibt sich die Masse von K über den Transfomationssatz

$$\begin{aligned} M &= \int_K 1 + x^2 + y^2 + z^2 \, d(x,y,z) = \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} (1+r^2) r^2 \cos(\psi) \, d\varphi \, d\psi \, dr \\ &= \int_0^1 r^4 + r^2 \, dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \cos(\psi) \, d\psi = \left(\left(\frac{r^5}{5} + \frac{r^3}{3} \right) \Big|_0^1 \right) \left(\varphi|_0^{2\pi} \right) \left(\sin(\psi)|_0^{\pi/2} \right) \\ &= \frac{8}{15} \cdot 2\pi \cdot 1 = \frac{16\pi}{15} \end{aligned}$$