Aufgabe 1: (4 Punkte)

Man berechne alle stationären Punkte der folgenden Funktion und klassifiziere sie

$$f(x,y) = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + \frac{y^2}{2} + 2y.$$

Lösung:

grad $f(x,y) = (x^3 - 4x, y + 2)^T = (x(x^2 - 4), y + 2)^T = (0,0)^T$

Man erhält $x_1 = 0,\ x_2 = 2$ oder $x_3 = -2$ und $y = -2$, also insgesamt die Punkte

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix},\ P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix},\ P_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Hess $f(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Hess $f(P_1) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Eigenwerte $\lambda_1 = -4, \lambda_1 = 1 \Rightarrow$ indefinit $\Rightarrow P_1$ Sattelpunkt

Hess $f(P_2) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Eigenwerte $\lambda_1 = 8, \lambda_1 = 1 \Rightarrow$ positiv definit $\Rightarrow P_2$ Minimum

Hess $f(P_3) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Eigenwerte $\lambda_1 = 8, \lambda_1 = 1 \Rightarrow$ positiv definit $\Rightarrow P_3$ Minimum

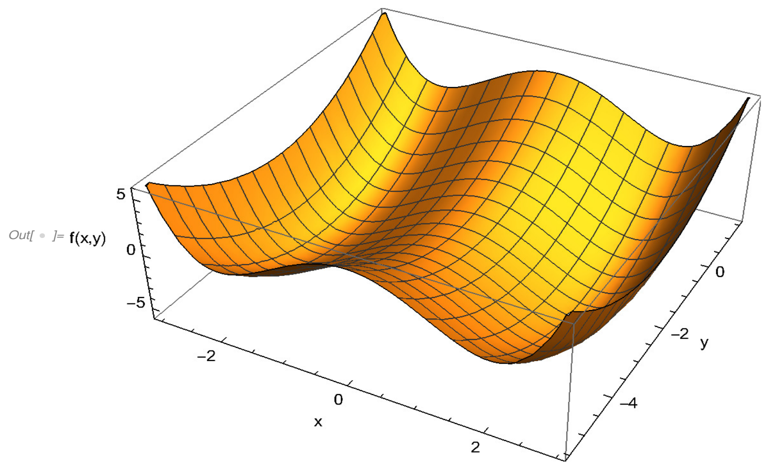

Bild 1 $f(x,y) = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + \frac{y^2}{2} + 2y$

Aufgabe 2: (1+1+3 Punkte)

Durch die Niveaumenge

$$f(x,y) := x^2 - 6x + 4y^2 + 5 = 0$$

ist implizit eine Kurve gegeben.

a) Man gebe die Symmetrien der Kurve an.

b) Man bestimme den Gradienten von f.

c) Man berechne die Kurvenpunkte mit horizontaler und vertikaler Tangente.

Lösung:

a) (1 Punkt) Die Kurve ist symmetrisch zur x-Achse, denn

$$f(x,-y) = x^2 - 6x + 4(-y)^2 + 5 = f(x,y).$$

b) (1 Punkt)
grad $f(x,y) = (f_x(x,y), f_y(x,y)) = (2x-6, 8y)$

c) (3 Punkte)

(i) Kurvenpunkte mit horizontaler Tangente ergeben sich aus den Bedingungen

$$f_x(x,y) = 0 \quad \wedge \quad f(x,y) = 0 \quad \wedge \quad f_y(x,y) \neq 0\,.$$

$0 = f_x(x,y) = 2x - 6 \quad \Rightarrow \quad x = 3$
$\Rightarrow \quad 0 = f(3,y) = 3^2 - 18 + 4y^2 + 5 \quad \Rightarrow \quad y^2 = 1 \vee y_{1,2} = \pm 1$

$$\Rightarrow \quad P_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \; P_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $f_y(3,\pm 1) \neq 0$.

(ii) Kurvenpunkte mit vertikaler Tangente ergeben sich aus den Bedingungen

$$f_y(x,y) = 0 \quad \wedge \quad f(x,y) = 0 \quad \wedge \quad f_x(x,y) \neq 0\,.$$

$0 = f_y(x,y) = 8y \quad \Rightarrow \quad y = 0$
$\Rightarrow \quad 0 = f(x,0) = x^2 - 6x + 5 = (x-1)(x-5) \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1 \vee x_2 = 5$

$$\Rightarrow \quad P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; P_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $f_x(x_{1,2},0) \neq 0$.

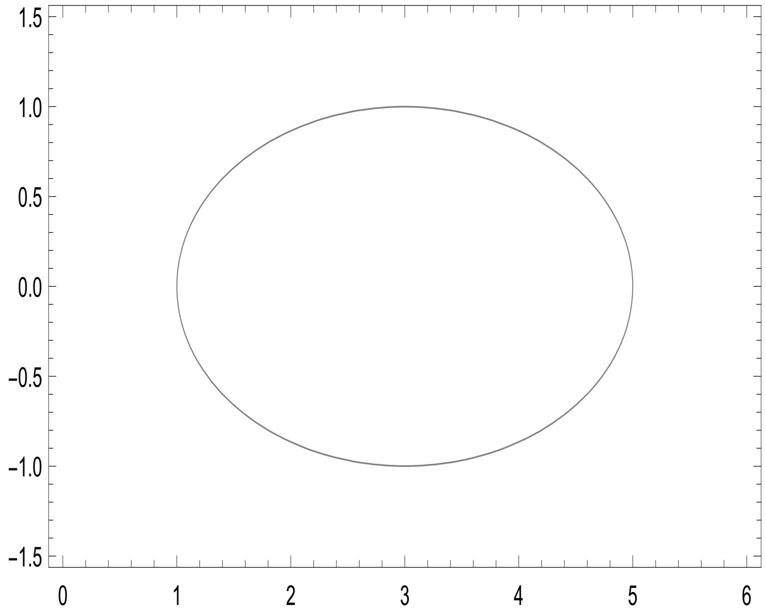

Bild 2 Ellipse $\dfrac{(x-3)^2}{2^2} + y^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 4y^2 + 5 = 0.$

Aufgabe 3: (2+2 Punkte)

a) Man skizziere den durch $1 \le z \le 2$ und $x^2 + y^2 \le 9$ beschriebenen Bereich Z und stelle ihn durch Zylinderkoordinaten dar.

b) Mit der Dichte $\rho(x, y, z) = z^2$ berechne man für Z das Trägheitsmoment bezüglich der z-Achse unter Verwendung von Zylinderkoordinaten.

Lösung:

a)

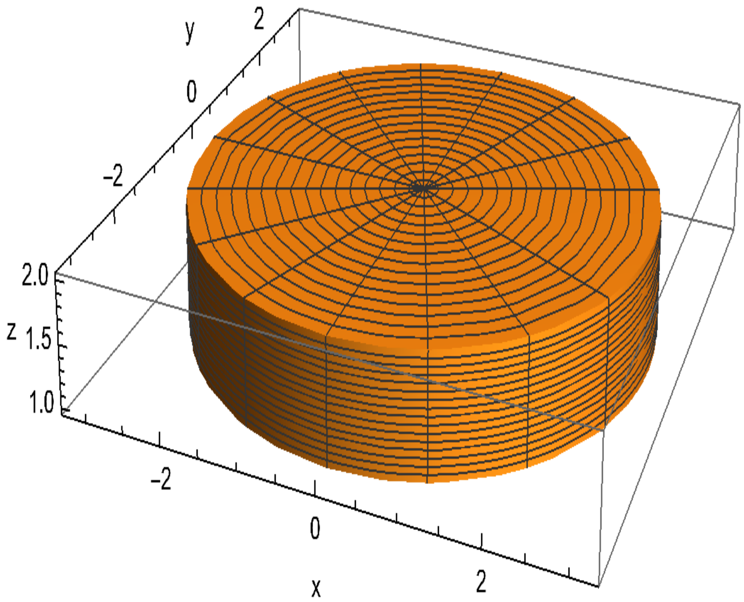

Bild 3 Zylinder Z.

Zylinderkoordinaten mit $0 \le r \le 3,\ 0 \le \varphi \le 2\pi, 1 \le z \le 2$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi(r, \varphi, \psi) = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}$$

b) Berechnung des Trägheitsmoments über den Transformationssatz

$$\begin{aligned} \Theta_{z\text{-Achse}} &= \int\limits_Z \rho(x,y,z) r^2(x,y,z)\ d(x,y,z) = \int\limits_Z z^2(x^2+y^2)\ d(x,y,z) \\ &= \int\limits_0^3 \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_1^2 z^2 \cdot r^2 \cdot r\ dz\, d\varphi\, dr = \int\limits_0^3 r^3 dr \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_1^2 z^2\ dz \\ &= \left(\frac{r^4}{4} \Big|_0^3 \right) \left(\varphi|_0^{2\pi} \right) \left(\frac{z^3}{3} \Big|_1^2 \right) = \frac{3^4}{4} \cdot 2\pi \cdot \frac{7}{3} = \frac{189\pi}{2} \end{aligned}$$

Aufgabe 4: (1+2+3+1 Punkte)

Gegeben seien das Vektorfeld $\boldsymbol{f}(x, y, z) = (0, yz, 0)^T$ und der Körper

$$K = \left\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\,,\; z \leq 0 \;\right\}\,.$$

a) Man skizziere K.

b) Für die K berandenden Flächenstücke gebe man jeweils Parametrisierungen an.

c) Man berechne jeweils den Fluss von $\boldsymbol{f}$ durch diese Randflächenstücke.

Hinweis: Es gilt $\displaystyle\int \sin^2(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2}(\varphi - \sin(\varphi)\cos(\varphi))$.

d) Man berechne das Volumenintegral $\displaystyle\int_K \operatorname{div} \boldsymbol{f}(x, y, z)\, d(x, y, z)\,.$

Lösung:

a) (1 Punkt)

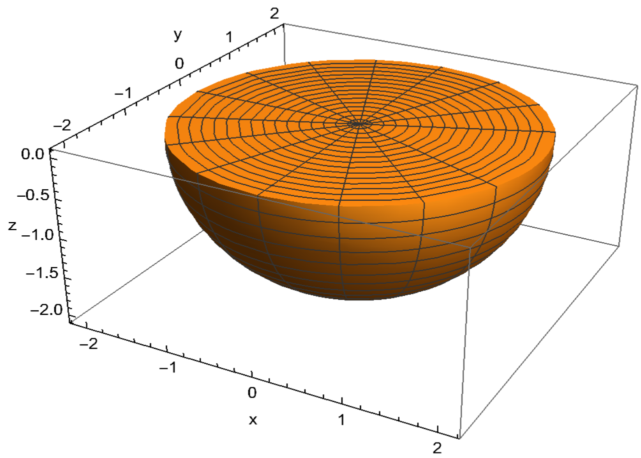

Bild 4 Halbkugel K

b) (2 Punkte)

Parametrisierung der Kreisseite S: $\boldsymbol{p} : [0, 2] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\boldsymbol{p}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Parametrisierung der Halbkugelfläche H: $\boldsymbol{q} : [0, 2\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right] \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\boldsymbol{q}(\varphi, \psi) = \begin{pmatrix} 2\cos(\varphi)\cos(\psi) \\ 2\sin(\varphi)\cos(\psi) \\ 2\sin(\psi) \end{pmatrix}$$

c) (3 Punkte)

Fluss durch S, mit der äußeren Normalen

$$\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial r} \times \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \varphi} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -r\sin(\varphi) & r\cos(\varphi) & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}$$

$$\int_S \boldsymbol{f}\, do = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ r\sin(\varphi)\cdot 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix} \right\rangle d\varphi dr = \int_0^2 \int_0^{2\pi} 0 \, d\varphi dr = 0$$

Fluss durch H, mit der äußeren Normalen

$$\frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial \psi} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ -2\sin(\varphi)\cos(\psi) & 2\cos(\varphi)\cos(\psi) & 0 \\ -2\cos(\varphi)\sin(\psi) & -2\sin(\varphi)\sin(\psi) & 2\cos(\psi) \end{vmatrix} = 4\cos(\psi) \begin{pmatrix} \cos(\varphi)\cos(\psi) \\ \sin(\varphi)\cos(\psi) \\ \sin(\psi) \end{pmatrix}$$

$$\int_T \boldsymbol{f}\, do = \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{0} 4\cos(\psi) \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 2\sin(\varphi)\cos(\psi) 2\sin(\psi) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos(\varphi)\cos(\psi) \\ \sin(\varphi)\cos(\psi) \\ \sin(\psi) \end{pmatrix} \right\rangle d\psi d\varphi$$

$$= 16 \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{0} \sin^2(\varphi)\sin(\psi)\cos^3(\psi) d\psi d\varphi$$

$$= -16 \left(\frac{1}{2}(\varphi - \sin(\varphi)\cos(\varphi)) \Big|_0^{2\pi} \right) \left(\frac{\cos^4(\psi)}{4} \Big|_{-\pi/2}^{0} \right) = -4\pi$$

d) (1 Punkt)

Mit dem Gaußschen-Integralsatz erhält man:

$$\int_K \operatorname{div} \boldsymbol{f}\, d(x,y,z) = \int_S \boldsymbol{f}\, do + \int_H \boldsymbol{f}\, do = -4\pi$$

Alternativ: direkte Berechnung über Kugelkoordinaten mit $\operatorname{div} \boldsymbol{f}(x,y,z) = z$

$$\int_K \operatorname{div} \boldsymbol{f}(x,y,z)\, d(x,y,z) = \int_K z\, d(x,y,z)$$

$$= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{0} r\sin(\psi) r^2 \cos(\psi)\, d\psi d\varphi dr$$

$$= \int_0^2 r^3 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi/2}^{0} \cos(\psi)\sin(\psi)\, d\psi = \frac{r^4}{4}\Big|_0^2 \cdot \varphi\Big|_0^{2\pi} \cdot \frac{\sin^2(\psi)}{2}\Big|_{-\pi/2}^{0} = -4\pi$$