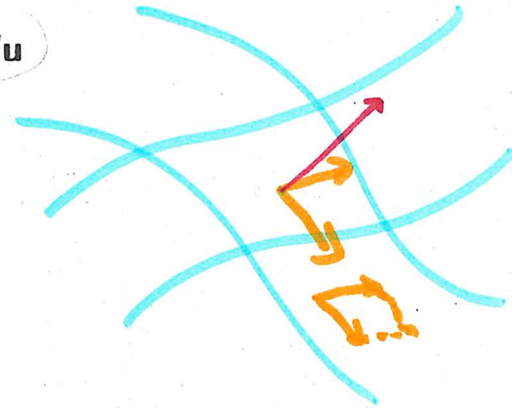
Das Oberflächenintegral eines Flächenstückes.

Definition: Sei $\mathbf{p} : D \to \mathbb{R}^3$ die Parameterdarstellung einer Fläche, und sei $K \subset D$ kompakt, messbar und zusammenhängend. Dann wird der Flächeninhalt von $\mathbf{p}(K)$ definiert durch das Oberflächenintegral

$$\int_{\mathbf{p}(K)} do := \int_K \left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1}(\mathbf{u}) \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2}(\mathbf{u}) \right\| du$$



Dabei nennt man den Term

$$do := \left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1}(\mathbf{u}) \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2}(\mathbf{u}) \right\| du$$

das Oberflächenelement der Fläche $\mathbf{x} = \mathbf{p}(\mathbf{u})$.

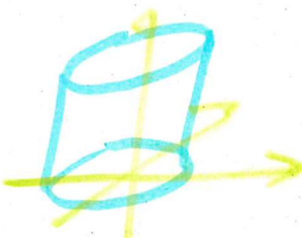
Bemerkung: Das Oberflächenintegral ist insbesondere **unabhängig** von der speziellen Parametrisierung der Fläche. Dies folgt aus dem Transformationssatz.

Beispiel.

Für die Mantelfläche des Zylinders $Z = \mathbf{p}(K)$ mit

$$K := [0, 2\pi] \times [0, H] \subset \mathbb{R}^2$$

Quader in φ, z / Koord.



und

$$\mathbf{x} = \mathbf{p}(\varphi, z) := \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \qquad \text{für } (\varphi, z) \in \mathbb{R}^2$$

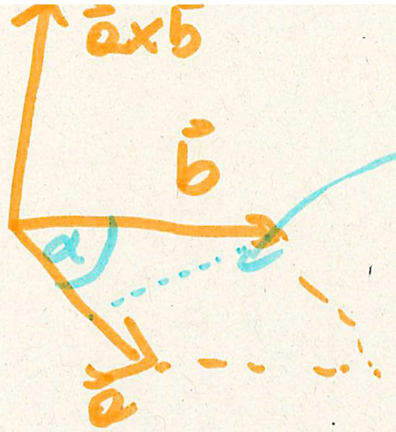
r fest

erhält man mit

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial z} \right\| = r$$

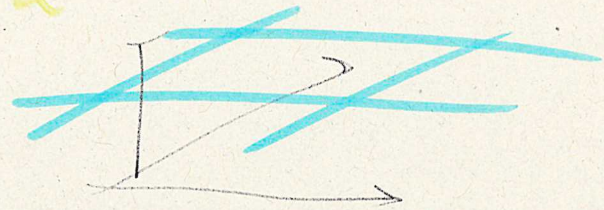
den Wert

$$O(Z) = \int_Z do = \int_K r d(\varphi, z) = \int_0^{2\pi} \int_0^H r dz d\varphi = 2\pi r H$$



$F = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\alpha$

<u>spl 1</u> $\varphi(u_1, u_2) = 1$

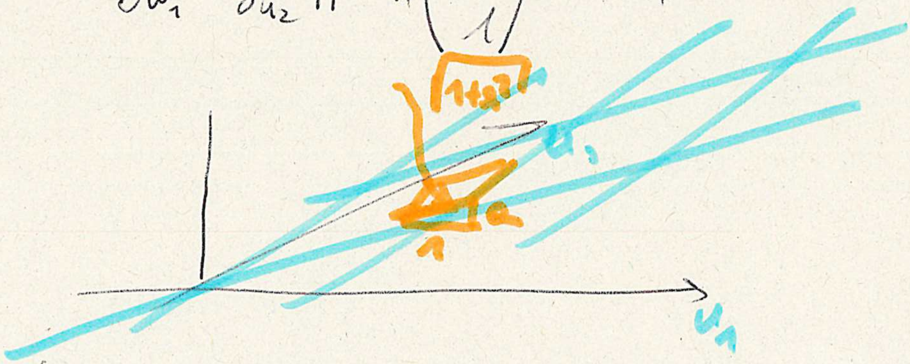


$$\frac{\partial\varphi}{\partial u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial u_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left\| \frac{\partial\varphi}{\partial u_1} \times \frac{\partial\varphi}{\partial u_2} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = 1$$

<u>spl 2</u>

$\varphi(u_1, u_2) = a u_1$



$$\left| \frac{\partial\varphi}{\partial u_1} \times \frac{\partial\varphi}{\partial u_2} \right| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -a \\ \text{[illegible]} \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1 + a^2}$$

Beispiel.

Ist die Fläche der Graph einer skalaren Funktion, d.h. $x_3 = \varphi(x_1, x_2)$, so gilt für die zugehörigen Tangentialvektoren

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \varphi_{x_1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \varphi_{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\varphi_{x_1} \\ -\varphi_{x_2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_2} \right\| = \sqrt{1 + \varphi_{x_1}^2 + \varphi_{x_2}^2}$$

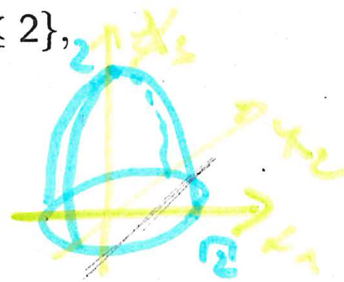
und

$$\begin{aligned} O(\mathbf{p}(K)) &= \int_{\mathbf{p}(K)} do \\ &= \int_K \sqrt{1 + \varphi_{x_1}^2 + \varphi_{x_2}^2}\, d(x_1, x_2) \end{aligned}$$

Beispiel.

Für die Oberfläche des Paraboloids P, gegeben durch

$$P := \{(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 2 - x_1^2 - x_2^2,\ x_1^2 + x_2^2 \le 2\},$$



gilt $\varphi_{x_1} = -2x_1 \quad \varphi_{x_2} = -2x_2$

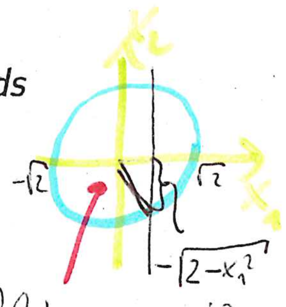
$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{2-x_1^2}}^{\sqrt{2-x_1^2}} \sqrt{1+4x_1^2+4x_2^2}\, dx\, dx_1$$

$$O(P) = \int_{x_1^2+x_2^2 \le 2} \sqrt{1 + 4x_1^2 + 4x_2^2}\, d(x_1, x_2)$$

$|\det F_\varphi|$

$$= \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + 4r^2}\, r\, d\varphi\, dr = \pi \int_0^2 \sqrt{1 + 4s}\, ds$$

$$= \pi \left[\frac{1}{6}(1 + 4s)^{3/2} \right]_0^2 = \pi \left(\frac{1}{6}(27 - 1) \right) = \frac{13}{3}\pi$$



In Polarkoordinaten in Quadr.

Bemerkung.

Für das Kreuzprodukt zweier Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 - \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle^2$$

Daraus folgt

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_2} \right\|^2 = \left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_1} \right\|^2 \left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_2} \right\|^2 - \left\langle \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_1}, \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_2} \right\rangle^2$$

Definiert man

$$E := \left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_1} \right\|^2, \quad F := \langle \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_1}, \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_2} \rangle^2, \quad G := \left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_2} \right\|^2,$$

so ergibt sich die Beziehung

$$do = \sqrt{EG - F^2}\, d(u_1, u_2)$$

Beispiel.

Für das Oberflächenelement der Sphäre

$$S_r^2 = \{(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2\}$$

ergeben sich mit der Parametrisierung über Kugelkoordinaten

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos\varphi \cos\theta \\ \sin\varphi \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \qquad \text{für } (\varphi, \theta) \in [0, 2\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

r fest

die Beziehungen

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \varphi} = r \begin{pmatrix} -\sin\varphi \cos\theta \\ \cos\varphi \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \theta} = r \begin{pmatrix} -\cos\varphi \sin\theta \\ -\sin\varphi \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

Daraus folgt

$$E = r^2 \cos^2\theta, \quad F = 0, \quad G = r^2$$

Fortsetzung des Beispiels.

Mit

$$E = r^2 \cos^2 \theta, \quad F = 0, \quad G = r^2$$

folgt aus der Beziehung

$$do = \sqrt{EG - F^2}\, d(u_1, u_2)$$

daher

$$do = r^2 \cos\theta \, d(\varphi, \theta) \qquad \text{für } (\varphi, \theta) \in [0, 2\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$\boxed{\text{Ränder in } (\varphi, \theta)}$

?

Wir können nun die Oberfläche der Sphäre wie folgt berechnen.

$$\begin{aligned} O &= \int_{S_r^2} do = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} r^2 \cos\theta \, d\varphi \, d\theta \\ &= 2\pi r^2 \sin\theta \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 4\pi r^2 \end{aligned}$$

Oberflächenintegrale erster und zweiter Art.

Definition: Sei $\mathbf{x} = \mathbf{p}(\mathbf{u})$ eine C^1–Parametrisierung einer Fläche $F = \mathbf{p}(K)$, wobei $K \subset D$ kompakt, messbar und zusammenhängend ist.

- Für eine stetige Funktion $f : F \to \mathbb{R}$ ist das Oberflächenintegral 1. Art definiert durch

$$\int_F f(\mathbf{x})\, do := \int_K f(\mathbf{p}(\mathbf{u})) \underbrace{\left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2} \right\| du}_{do}$$

- Für ein stetiges Vektorfeld $\mathbf{f} : F \to \mathbb{R}^3$ ist das Oberflächenintegral 2. Art definiert durch

$$\int_F \mathbf{f}(\mathbf{x})\, do := \int_K \left\langle \mathbf{f}(\mathbf{p}(\mathbf{u})), \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2} \right\rangle du$$

Alternative Darstellung für Oberflächenintegrale.

Andere Darstellungen des Oberflächenintegrals 2. Art

Der Einheitsnormalenvektor $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ auf der Fläche F ist gegeben durch

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}) = \mathbf{n}(\mathbf{p}(\mathbf{u})) = \frac{\dfrac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1} \times \dfrac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2}}{\left\| \dfrac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1} \times \dfrac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2} \right\|}$$

Wir schreiben daher auch

$$\begin{aligned}
\int_F \mathbf{f}(\mathbf{x})\, d\mathbf{o} &= \int_K \left\langle \mathbf{f}(\mathbf{p}(\mathbf{u})), \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2} \right\rangle du \\
&= \int_K \langle \mathbf{f}(\mathbf{p}(\mathbf{u})), \mathbf{n}(\mathbf{p}(\mathbf{u})) \rangle \underbrace{\left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2} \right\| du}_{do} \\
&= \int_F \langle \mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{n}(\mathbf{x}) \rangle \, do
\end{aligned}$$

Interpretation der Oberflächenintegrale.

Bemerkung: • $f(x) = 1$ $\Rightarrow$ Fläche

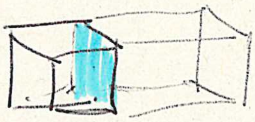
- Ist $f(\mathbf{x})$ die Dichte einer massenbelegten Fläche, so liefert das Integral 1. Art gerade die Gesamtmasse der Fläche.
- Ist $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ ein Geschwindigkeitsfeld einer stationären Strömung, so liefert das Integral 2. Art die Flüssigkeitsmenge, die pro Zeiteinheit durch die Fläche F strömt, d.h. den Fluss von $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ durch die Fläche F.
- Ist F eine geschlossene Fläche, d.h. die Oberflächen eines kompakten und einfach zusammenhängenden Körpers im $\mathbb{R}^3$, so schreiben wir

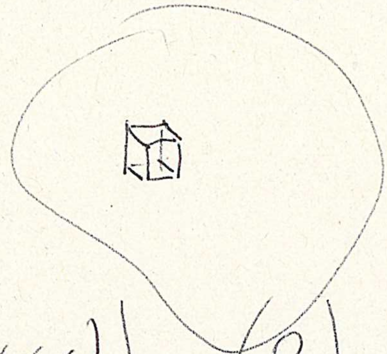
$$\oint_F f(\mathbf{x})\, do \qquad \text{bzw.} \qquad \oint_F \mathbf{f}(\mathbf{x})\, d\mathbf{o}$$

Die Parametrisierung ist dabei so gewählt, dass der Einheitsnormalenvektor $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ nach außen weist.

Beweis idee:

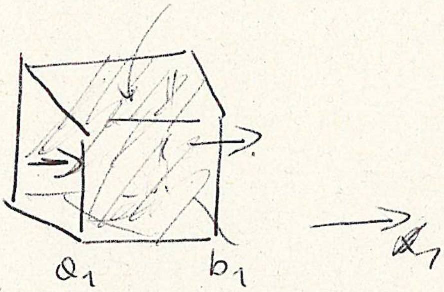
G füllen mit kleinen Quadern





$$f = f(x_1,x_2,x_3) = f_1 + f_2 + f_3 = \begin{pmatrix} f_1(x_1,x_2,x_3) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f_3 \end{pmatrix}$$

f_1



$$\int_{\square} \operatorname{div} f_1 \, dx = \iiint \partial_{x_1} f_1 \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3 = \iint \left(f(b_1,x_2,x_3) - f(a_1,x_2,x_3) \right) dx_2 \, dx_3$$

$$\|$$

$$\oint_{\square} f_1(x) \, do = \iint \left(f_1(b_1,x_2,x_3) - f_1(a_1,x_2,x_3) \right) dx_2 \, dx_3$$

analog $f_2, f_3 \implies f$

Der Integralsatz von Gauß.

Satz: (Integralsatz von Gauß) Sei $G \subset \mathbb{R}^3$ ein kompakter und messbarer Standardbereich, d.h. G sei bezüglich jeder Koordinate projizierbar. Der Rand ∂G bestehe aus endlich vielen glatten Flächenstücken mit äußerer Normale $\mathbf{n}(\mathbf{x})$.

Kugel
Zylinder
Quader

Ist $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^3$ ein C^1–Vektorfeld mit $G \subset D$, so gilt

$$\int_G \operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \oint_{\partial G} \mathbf{f}(\mathbf{x})\, do$$

Interpretation des Gaußschen Integralsatzes: Die linke Seite ist ein Bereichsintegral über die skalare Funktion $g(\mathbf{x}) := \operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x})$. Die rechte Seite ist ein Oberflächenintegral 2. Art bezüglich des Vektorfeldes $\mathbf{f}(\mathbf{x})$. Ist $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ das Geschwindigkeitsfeld einer inkompressiblen Strömung, so gilt $\operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$ und daher

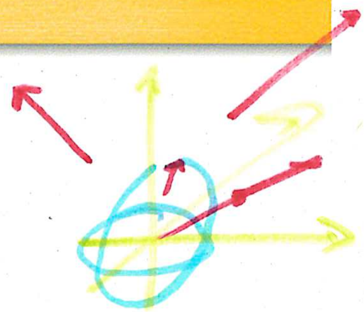
$\operatorname{div} f = 0$ V

$$\oint_{\partial G} \mathbf{f}(\mathbf{x})\, do = 0$$

Beispiel.

Wir betrachten das Vektorfeld

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$$



und die Kugel K:

$$K := \{(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1\}$$

Dann gilt offensichtlich

$$\operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = 3 \quad = \sum_{i=1}^{3} \partial_{x_i} f_i$$

und damit

Gauss

$$= \int \underbrace{\langle f, n\rangle}_{1}\, do = \oint_{\partial K} f(x)\, do = \int_K \overbrace{\operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x})}^{3}\, d\mathbf{x} = 3 \cdot \overbrace{\operatorname{vol}(K)}^{\frac{4}{3}\pi} = 4\pi$$

Das entsprechende Oberflächenintegral läßt sich am besten durch Übergang auf Kugelkoordinaten, d.h. durch die Parametrisierung der Kugel mit Kugelkoordinaten, berechnen.

Der Integralsatz von Stokes.

Satz: (Integralsatz von Stokes)

Sei $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^3$ ein $\mathcal{C}^1$–Vektorfeld auf einem Gebiet $D \subset \mathbb{R}^3$.

Weiter sei $F = \mathbf{p}(K)$ eine Fläche in D, $F \subset D$, mit der Parametrisierung $\mathbf{x} = \mathbf{p}(\mathbf{u})$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$, und $K \subset \mathbb{R}^2$ sei ein Greenscher Bereich.

Der Rand ∂K werde durch eine stückweise glatte $\mathcal{C}^1$–Kurve $\mathbf{c}$ parametrisiert, deren Bild $\tilde{\mathbf{c}}(t) := p(\mathbf{c}(t))$ dann den Rand ∂F der Fläche F parametrisiert.

Die Orientierung der Randkurve $\tilde{\mathbf{c}}(t)$ sei hierbei so gewählt, dass $\mathbf{n}(\tilde{\mathbf{c}}(t)) \times \dot{\tilde{\mathbf{c}}}(t)$ in Richtung der Fläche weist.

Dann gilt

$$\int_F \operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x})\, do = \oint_{\partial F} \mathbf{f}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$$

Beispiel.

Gegeben sei das Vektorfeld

$$\mathbf{f}(x, y, z) = (-y, x, -z)^T$$

$\operatorname{rot} f = \begin{pmatrix} \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ -y & x & -z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

und die geschlossene Kurve $\mathbf{c} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ sei parametrisiert durch

$$\mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t, 0)^T \qquad \text{für } 0 \le t \le 2\pi$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\oint_c \mathbf{f}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} &= \int_0^{2\pi} \langle \mathbf{f}(\mathbf{c}(t)), \dot{\mathbf{c}}(t) \rangle\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle dt \\
&= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)\, dt = 2\pi
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Rechte Seite von Stokes}}$

Die Formeln von Green.

Satz: (Formeln von Green) Die Menge $G \subset \mathbb{R}^3$ erfülle die Voraussetzungen des Gaußschen Integralsatzes. Für C^2–Funktionen $f, g : D \to \mathbb{R}$, $G \subset D$, gelten dann die Relationen:

i)
$$\int_G (f\Delta g + \langle \nabla f, \nabla g\rangle)\, d\mathbf{x} = \oint_{\partial G} f \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}}\, do \stackrel{?}{=} \oint_{\partial G} f \langle n, \nabla g\rangle\, do$$

i) $f \Leftrightarrow g$ differenz:
$$\int_G (f\Delta g - g\Delta f)\, d\mathbf{x} = \oint_{\partial G} \left(f\frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} - g\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \right) do$$

"1d"
$$\int (f g_{xx} + f_x g_x)\,dx = f g_x \Big|_a^b \Rightarrow \int f g_{xx} = f g_x \Big|_a^b - \int f_x g_x$$ part. Int.

Hierbei bezeichnet

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}) = D_{\mathbf{n}} f(\mathbf{x}) \qquad \text{für } \mathbf{x} \in \partial G$$

die Richtungsableitung von $f(\mathbf{x})$ in Richtung des äußeren Einheitsnormalenvektors $\mathbf{n}(\mathbf{x})$.

Beweis der Greenschen Formeln.

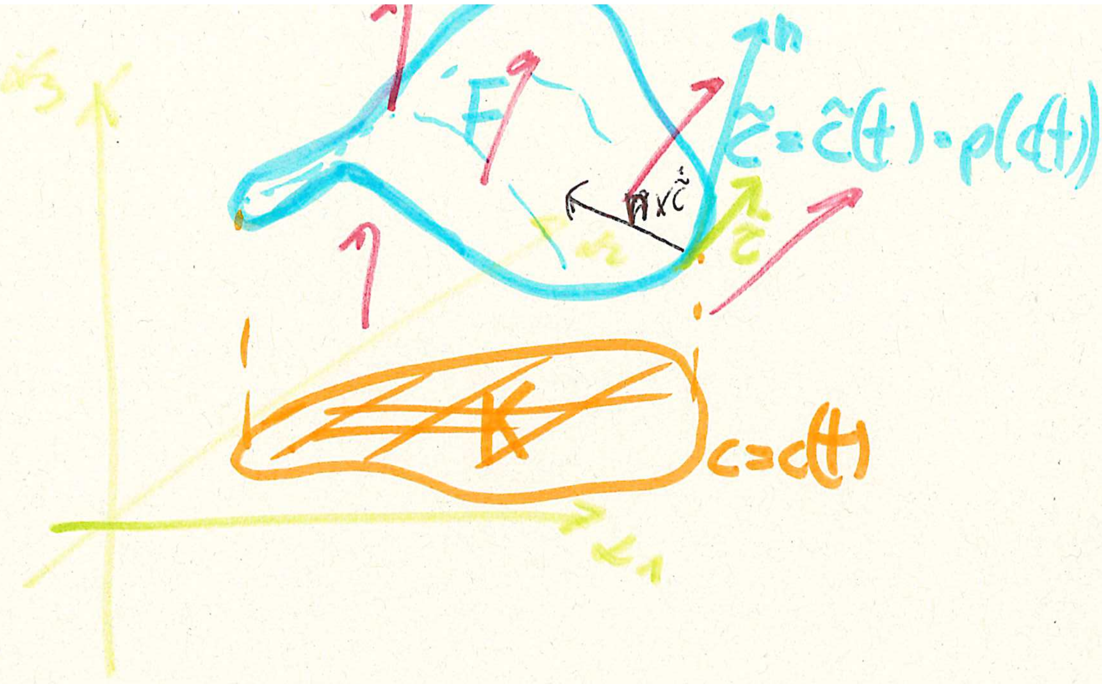
Wir setzen
$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \cdot \nabla g(\mathbf{x})$$

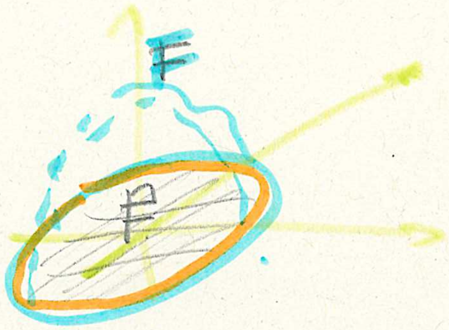
Dann gilt
$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{x}) &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(f \cdot \frac{\partial g}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(f \cdot \frac{\partial g}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(f \cdot \frac{\partial g}{\partial x_3}\right) \\ &= f \cdot \Delta g + \langle \nabla f, \nabla g \rangle \end{aligned}$$

Wir wenden nun den Gaußschen Integralsatz an:

$$\begin{aligned} \int_G (f\Delta g + \langle \nabla f, \nabla g\rangle)\, dx &= \int_G \operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{x})\, dx \stackrel{\text{Gauss}}{=} \oint_{\partial G} \langle \mathbf{F}, \mathbf{n}\rangle\, do \\ &= \oint_{\partial G} f \langle \nabla g, \mathbf{n}\rangle\, do = \oint_{\partial G} f \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}}\, do \end{aligned}$$

Die zweite Greensche Formel folgt direkt durch Vertauschen von f und g.





$$\oint_{\partial F} f(x)\,dx = \int_{F} \operatorname{rot} f \, do = \int_{F} \operatorname{rot} f \, do$$

$$\oint_{\partial F} f(x)\,dx = 2\pi$$

$$\varphi(x_1, x_2) = 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \times \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\left\langle \underbrace{\operatorname{rot} f}_{\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle = 2$$

$$\iint_{O} 2\,dx_1\,dx_2 = \int_0^1\int_0^{2\pi} 2\, r\,dr\,d\varphi = 2\,\frac{1}{2}\,2\pi = \boxed{2\pi}$$

Fortsetzung des Beispiels.

Wir definieren nun eine Fläche $F \subset \mathbb{R}^3$, die durch die Kurve $\mathbf{c}(t)$ berandet wird:

R=1

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi \\ \sin\varphi\cos\psi \\ \sin\psi \end{pmatrix} =: \mathbf{p}(\varphi,\psi)$$

mit $(\varphi,\psi) \in K = [0,2\pi] \times [0,\pi/2]$, d.h. die Fläche F ist gerade die obere Kugelhälfte.

Der Integralsatz von Stokes besagt nun:

$$\int_F \operatorname{rot}\mathbf{f}(\mathbf{x})\,do = \oint_{\mathbf{c}=\partial F} \mathbf{f}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = 2\pi$$

Wir haben bereits die rechte Seite, ein **Kurvenintegral 2. Art**, berechnet:

$$\oint_{\mathbf{c}=\partial F} \mathbf{f}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = 2\pi$$

Komplettierung des Beispiels.

Es bleibt also das **Oberflächenintegral 2. Art**:

$$\int_F \operatorname{rot}\mathbf{f}(\mathbf{x})\,do = \int_K \left\langle \operatorname{rot}\mathbf{f}(\mathbf{p}(\varphi,\psi)), \frac{\partial\mathbf{p}}{\partial\varphi} \times \frac{\partial\mathbf{p}}{\partial\psi} \right\rangle d\varphi d\psi =$$

Beachte: Die rechte Seite ist ein **Bereichsintegral**.

Man rechnet $\operatorname{rot}\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (0,0,2)^T$ direkt nach, sowie

$$\frac{\partial\mathbf{p}}{\partial\varphi} \times \frac{\partial\mathbf{p}}{\partial\psi} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos^2\psi \\ \sin\varphi\cos^2\psi \\ \boxed{\sin\psi\cos\psi} \end{pmatrix}$$

Daraus folgt: $\left\langle \operatorname{rot} f, \frac{\partial p}{\partial\varphi} \times \frac{\partial p}{\partial\psi} \right\rangle = 2\sin\psi\cos\psi$

$$\int_F \operatorname{rot}\mathbf{f}(\mathbf{x})\,do = \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi} 2\sin\psi\cos\psi\,d\varphi d\psi = 2\pi\int_0^{\pi/2} \sin(2\psi)\,d\psi = 2\pi$$