Bedingungen für Potentiale.

Bemerkung: Ist $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in D \subset \mathbb{R}^3$, ein $\mathcal{C}^1$–Vektorfeld mit Potential $\varphi(\mathbf{x})$, so folgt

$$\operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \operatorname{rot}(\nabla\varphi(\mathbf{x})) = 0 \qquad \text{für alle } \mathbf{x} \in D$$

Somit ist $\operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$ eine notwendige Bedingung für die Existenz eines Potentials ist.

Definiert man für ein Vektorfeld $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^2$, $D \subset \mathbb{R}^2$, die **skalare** Rotation

$$\operatorname{rot} \mathbf{f}(x,y) := \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)$$

(3te Komponente der 3d Interpretation)

$\operatorname{rot} f = \operatorname{rot}(\nabla\varphi) = \partial_x \partial_y \varphi - \partial_y \partial_x \varphi = 0$ (falls φ C^2)

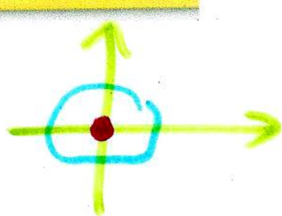
so ist $\operatorname{rot} \mathbf{f}(x,y) = 0$ auch in zwei Dimensionen eine notwendige Bedingung.

Die Bedingung

$$\operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$$

ist eine hinreichende Bedingung, falls das Gebiet D **einfach zusammenhängend** ist, d.h. keine "Löcher" enthält.

Beispiel.



Wir betrachten erneut das Vektorfeld

$$\mathbf{f}(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \qquad \text{mit } (x,y)^T \in D = \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$$

$r = \sqrt{x^2+y^2}$

Berechnet man die Rotation, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\left[\frac{1}{r^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}\right] &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \partial_x f_2 - \partial_y f_1 \\ &= \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Die Rotation von $\mathbf{f}(x,y)$ verschwindet.

Allerdings besitzt $\mathbf{f}(x,y)$ auf der Menge $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ kein Potential.

Das Gebiet ist nämlich **nicht** einfach zusammenhängend.

3 Dimension:

$$\operatorname{rot} f(x) = \operatorname{rot}(\nabla\varphi(x)) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\varphi}_{f_1} & \underbrace{\frac{\partial}{\partial y}\varphi}_{f_2} & \underbrace{\frac{\partial}{\partial z}\varphi}_{f_3} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_{zy} - \varphi_{yz} \\ \varphi_{xz} - \varphi_{zx} \\ \varphi_{yx} - \varphi_{xy} \end{pmatrix} = \vec{0}$$

C^1 Vektorfeld falls φ 2x stetig diffbar (C^2)
f 1x — " — (C^1)

2 Dimension:

$$f = (f_1, f_2) = (f_1(x,y), f_2(x,y)) \longrightarrow f = (f_1, f_2, 0)(x,y)$$

$$\operatorname{rot} f = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1(x,y) & f_2(x,y) & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 0 - 0 \\ f_{2x} - f_{1y} \end{pmatrix}$$

Zu 153:

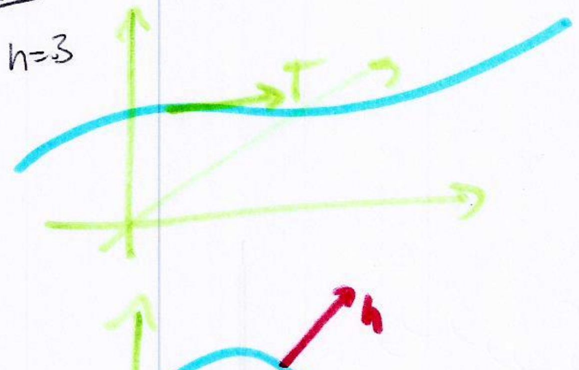
für diese Kurve Green nicht anwendbar

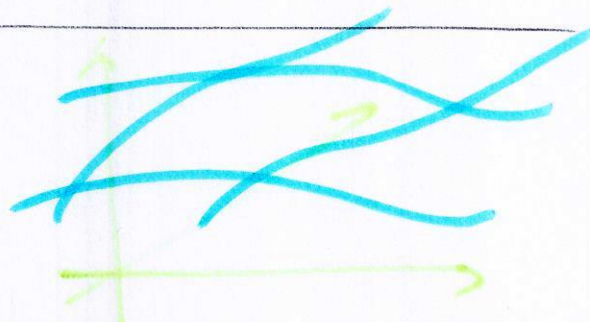
auch wenn $\operatorname{rot} f(x) = 0$ auf D

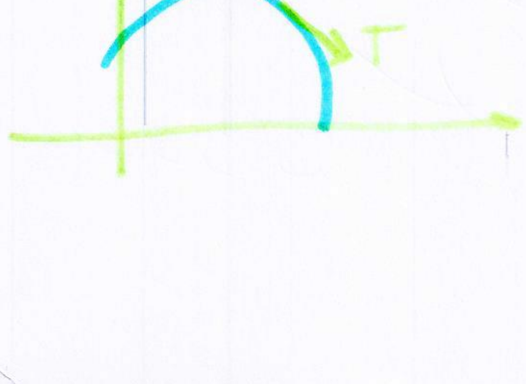
$\not\Rightarrow \oint$ zusammenhängend $= 0$

Zu 161

bisher







Der Integralsatz von Green für Vektorfelder im $\mathbb{R}^2$.

Satz: (Integralsatz von Green)

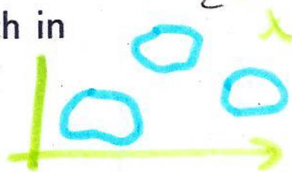
Sei $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ ein C^1–Vektorfeld auf dem Gebiet $D \subset \mathbb{R}^2$. Weiterhin sei $K \subset D$ kompakt und bezüglich beider Koordinatenrichtungen projizierbar, sodass K von einer geschlossenen, stückweisen C^1–Kurve $\mathbf{c}(t)$ berandet wird.

Die Parametrisierung von $\mathbf{c}(t)$ sei so gewählt, dass K stets links zur Durchlaufrichtung liegt (positiver Umlauf). Dann gilt:

$$\boxed{\oint_c \mathbf{f}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_K \operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}}$$

Bemerkung:

Der Greensche Integralsatz gilt auch für kompakte Bereiche, die sich in *endlich* viele, bezüglich beider Koordinatenrichtungen projizierbarer Bereiche zerlegen lassen, in so genannte Greensche Bereiche.



Alternative Formulierung des Greenschen Satzes I.

Wir hatten gesehen, dass die Beziehung

$$\oint_c \mathbf{f}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \oint_c \langle \mathbf{f}, \mathbf{T} \rangle\, ds = \oint_C \langle \mathbf{f}(\mathbf{c}(t)), \underbrace{\frac{\dot{\mathbf{c}}(t)}{\|\dot{\mathbf{c}}(t)\|}}_{T} \rangle \underbrace{\|\dot{\mathbf{c}}\|\, dt}_{ds}$$

gilt, wobei $\mathbf{T}(t) = \frac{\dot{\mathbf{c}}(t)}{\|\dot{\mathbf{c}}(t)\|}$ den Tangenteneinheitsvektor bezeichnet.

Daraus folgt mit dem Integralsatz von Green

$$\boxed{\int_K \operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \oint_{\partial K} \langle \mathbf{f}, \mathbf{T} \rangle\, ds}$$

Ist $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ ein Geschwindigkeitsfeld, so ist die durch $\mathbf{f}$ beschriebene Strömung unter der Bedingung $\operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$ wirbelfrei, denn

$$\oint_c \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

ist gerade die Zirkulation von $\mathbf{f}(\mathbf{x})$.

Alternative Formulierung des Greenschen Satzes II.

Ersetzt man in der obigen Gleichungen den Vektor $\mathbf{T}$ durch den äußeren Normaleneinheitsvektor $\mathbf{n} = (T_2, -T_1)^T$, so folgt $n \cdot T = 0$

$T = (T_1, T_2)$

$$\boxed{\oint_{\partial K} \langle \mathbf{f}, \mathbf{n} \rangle \, ds} = \oint_{\partial K} (f_1 T_2 - f_2 T_1) ds = \oint_{\partial K} \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} -f_2 \\ f_1 \end{pmatrix}}_{g}, \mathbf{T} \right\rangle ds$$

$$\overset{\text{Green}}{=} \int_K \text{rot} \underbrace{\begin{pmatrix} -f_2 \\ f_1 \end{pmatrix}}_{g} d\mathbf{x} = \boxed{\int_K \text{div}\, \mathbf{f} \, d\mathbf{x}}$$

$\text{rot}\, g = -\partial_2 g_1 + \partial_1 g_2 = -\partial_2(-f_2) + \partial_1 f_1 = \text{div} f$

$\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i} f_i$

und damit die Beziehung

$$\int_K \text{div}\, \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \oint_{\partial K} \langle \mathbf{f}, \mathbf{n} \rangle \, ds$$

Ist $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ das Geschwindigkeitsfeld einer Strömung, so beschreibt die rechte Seite den Gesamtfluss der Strömung durch den Rand von K. Gilt also $\text{div}\, \mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$, so ist die Strömung quellen– und senkenfrei (oder divergenzfrei).

$\text{div} f < 0$ in K → Senke
$\text{div} f = 0$ in K → Quellfrei
$\text{div} f > 0$ in K → Quelle

⇒ div Quellstärke

Nochmal zurück zur Existenz von Potentialen.

Folgerung: Ist $\text{rot}\, \mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$ für alle $\mathbf{x} \in D$, $D \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet, so folgt

$$\oint_c \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0$$

Satz v. Green

für jede geschlossene stückweise C^1–Kurve, die einen Greenschen Bereich $B \subset D$ vollständig umrandet.

Definition: Ein Gebiet $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt einfach zusammenhängend, falls sich jede geschlossene Kurve $\mathbf{c} : [a, b] \to D$ stetig innerhalb von D auf einen Punkt in D zusammenziehen lässt. Genauer: es gibt für $\mathbf{x}^0 \in D$ eine stetige Abbildung

$$\Phi : [a, b] \times [0, 1] \to D$$

mit $\Phi(t, 0) = \mathbf{c}(t)$, für alle $t \in [a, b]$ und $\Phi(t, 1) = \mathbf{x}^0 \in D$, für alle $t \in [a, b]$. Die Abbildung $\Phi(t, s)$ nennt man eine Homotopie.

Integrabilitätsbedingung für Potentiale.

Satz: Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Ein $\mathcal{C}^1$–Vektorfeld $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^n$ besitzt genau dann ein Potential auf D, falls die Integrabilitätsbedingung

$$\mathbf{J}\,\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (\mathbf{J}\,\mathbf{f}(\mathbf{x}))^T \qquad \text{für alle } \mathbf{x} \in D$$

erfüllt ist, d.h. falls gilt

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_k} \qquad \forall j, k$$

Bemerkung: Für $n = 2, 3$ stimmt die Integrabilitätsbedingung mit

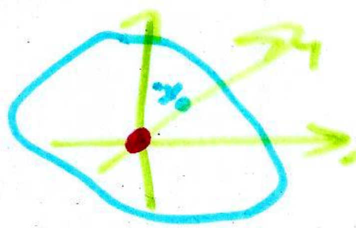
$n=3 \quad \mathrm{rot} f = \begin{pmatrix} \partial_y f_3 - \partial_z f_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = 0$

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$$

überein.

$n=2 \quad \mathrm{rot} f = \partial_x f_2 - \partial_y f_1 = 0$

Beispiel.



Für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ sei das Vektorfeld

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{2xy}{r^2} + \sin z \\ \ln r^2 + \dfrac{2y^2}{r^2} + ze^y \\ \dfrac{2yz}{r^2} + e^y + x\cos z \end{pmatrix} \qquad \text{mit } r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

gegeben.

Wir wollen untersuchen, ob $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ ein Potential besitzt.

Die Menge $D = \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ ist offensichtlich einfach zusammenhängend. Weiterhin gilt

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$$

Also besitzt $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ ein Potential.

Berechnung des Potentials.

Es muss gelten: $\boxed{\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \nabla\varphi(\mathbf{x})}$. Demnach folgt: φ gesucht $r^2 = x^2+y^2+z^2$

1.K.
$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = f_1(x,y,z) = \frac{2xy}{r^2} + \sin z$$

Durch Integration bezüglich der Variablen x ergibt sich: $(y \ln r^2)_x = y\,\frac{2x}{r^2}$

$$\varphi(\mathbf{x}) = y \ln r^2 + x \sin z + c(y,z)$$

mit einer unbekannten Funktion $c(y,z)$.

Einsetzen in die Gleichung

2K.
$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = f_2(x,y,z) = \ln r^2 + \frac{2y^2}{r^2} + ze^y$$

liefert

$$\cancel{\ln r^2} + \cancel{\frac{2y^2}{r^2}} + \frac{\partial c}{\partial y} = \cancel{\ln r^2} + \cancel{\frac{2y^2}{r^2}} + ze^y$$

Berechnung des Potentials (Fortsetzung).

Daraus folgt die Bedingung

$$\frac{\partial c}{\partial y} = ze^y$$

und somit gilt

$$c(y,z) = ze^y + d(z)$$

für eine unbekannte Funktion $d(z)$. Wir haben damit:

3.
$$\varphi(\mathbf{x}) = y \ln r^2 + x \sin z + ze^y + d(z)$$

$\varphi_z = \frac{2yz}{r^2} + e^y + x\cos z + d'(z)$

Die letzte Bedingung lautet

3K.
$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = f_3(x,y,z) = \frac{2yz}{r^2} + e^y + x\cos z$$

Daraus folgt $d'(z) = 0$ und das Potential ist gegeben durch

$$\boxed{\varphi(\mathbf{x}) = y \ln r^2 + x \sin z + ze^y + c} \qquad \text{für } c \in \mathbb{R}$$

Kapitel 3. Integralrechnung mehrerer Variabler

3.3 Oberflächenintegrale

Definition: Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $\mathbf{p} : \underset{\subset \mathbb{R}^2}{D} \to \mathbb{R}^3$ eine C^1–Abbildung

$$\mathbf{x} = \mathbf{p}(\mathbf{u}) \quad \text{mit } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \text{ und } \mathbf{u} = (u_1, u_2)^T \in D \subset \mathbb{R}^2$$

$$p(u) = \begin{pmatrix} p_1(u_1,u_2) \\ p_2(u_1,u_2) \\ p_3(u_1,u_2) \end{pmatrix}$$

Sind für alle $\mathbf{u} \in D$ die beiden Vektoren

$$\begin{pmatrix} p_{1u_1} \\ p_{2u_1} \\ p_{3u_1} \end{pmatrix} \quad \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2} \quad \begin{pmatrix} p_{1u_2} \\ p_{2u_2} \\ p_{3u_2} \end{pmatrix}$$

linear unabhängig, so heißt

$$F := \{\mathbf{p}(\mathbf{u}) \mid \mathbf{u} \in D\}$$

eine Fläche bzw. ein Flächenstück. Die Abbildung $\mathbf{x} = \mathbf{p}(\mathbf{u})$ nannt man dann eine Parametrisierung oder Parameterdarstellung der Fläche F.

Beispiel I.

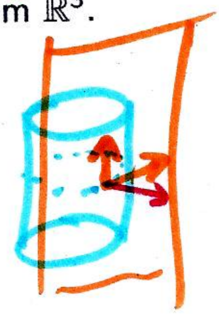
Wir betrachten für gegebenes $r > 0$ die Abbildung

r fest

$$\mathbf{p}(\varphi, z) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \qquad \text{für } (\varphi, z) \in \mathbb{R}^2.$$

Die dadurch parametrisierte Fläche ist ein unbeschränkter Zylinder im $\mathbb{R}^3$.
Schränken wir den Definitionsbereich ein, etwa

$$(\varphi, z) \in K := [0, 2\pi] \times [0, H] \subset \mathbb{R}^2$$



so erhalten wir einen beschränkten Zylinder der Höhe H.
Die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

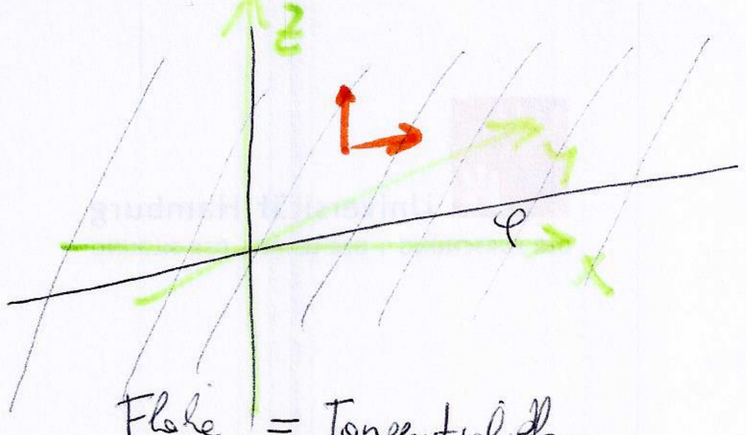
$$\frac{\partial p}{\partial \varphi} \perp \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

von $\mathbf{p}(\varphi, z)$ sind linear unabhängig auf ganz $\mathbb{R}^2$.

zu 162

φ fest
$$\tilde{p}(r,z) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

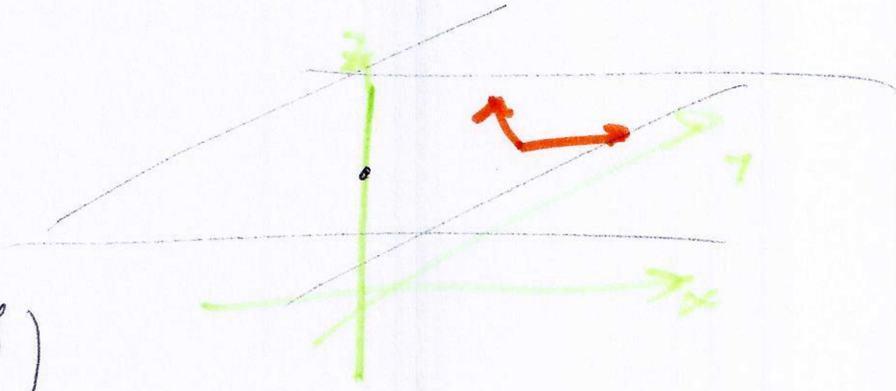
$$\tilde{p}_r = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \tilde{p}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Fläche = Tangentialebene

z fest
$$\hat{p}(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

$$\hat{p}_r = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{p}_\varphi = \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ -r\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$



Fläche = Tangentialebene

Beispiel II.

Der Graph einer skalaren $\mathcal{C}^1$–Funktion $\varphi : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$, ist eine Fläche.

Eine Parametrisierung ist gegeben durch

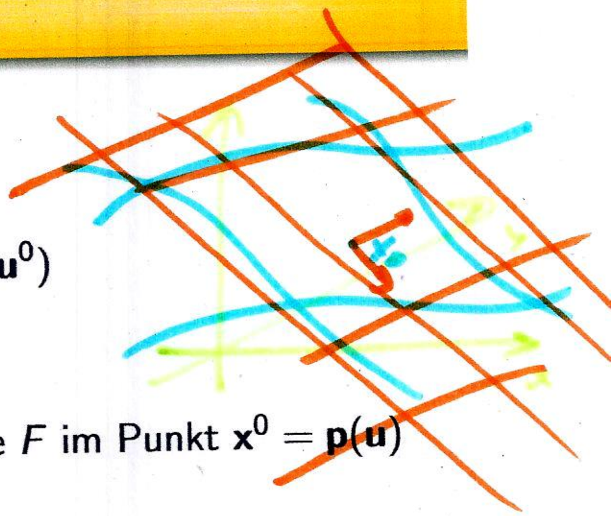
$$\mathbf{p}(u_1, u_2) := \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \varphi(u_1, u_2) \end{pmatrix} \qquad \text{für } \mathbf{u} \in D$$

Die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \varphi_{u_1} \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \varphi_{u_2} \end{pmatrix}$$

sind linear unabhängig.

Die Tangentialebene einer Fläche.



Die beiden linear unabhängigen Vektoren

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1}(\mathbf{u}^0) \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2}(\mathbf{u}^0)$$

liegen tangential an die Fläche F.

Sie spannen die Tangentialebene $T_{\mathbf{x}^0}F$ der Fläche F im Punkt $\mathbf{x}^0 = \mathbf{p}(\mathbf{u})$ auf.

Die Tangentialebene hat die Parameterdarstellung

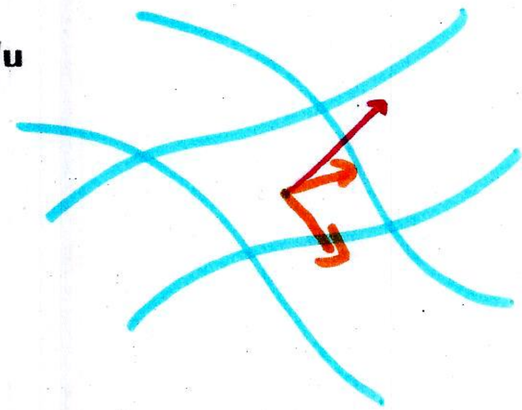
$$T_{\mathbf{x}^0}F \; : \; \mathbf{x} = \mathbf{x}^0 + \lambda \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1}(\mathbf{u}^0) + \mu \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2}(\mathbf{u}^0) \qquad \text{für } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Frage: Wie kann man den Flächeninhalt einer gegebenen Fläche F berechnen?

Das Oberflächenintegral eines Flächenstückes.

Definition: Sei $\mathbf{p} : D \to \mathbb{R}^3$ die Parameterdarstellung einer Fläche, und sei $K \subset D$ kompakt, messbar und zusammenhängend. Dann wird der Flächeninhalt von $\mathbf{p}(K)$ definiert durch das Oberflächenintegral

$$\int_{\mathbf{p}(K)} do := \int_K \left\| \underline{\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1}(\mathbf{u}) \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2}(\mathbf{u})} \right\| \, d\mathbf{u}$$



Dabei nennt man den Term

$$do := \left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_1}(\mathbf{u}) \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_2}(\mathbf{u}) \right\| \, d\mathbf{u}$$

das Oberflächenelement der Fläche $\mathbf{x} = \mathbf{p}(\mathbf{u})$.

Bemerkung: Das Oberflächenintegral ist insbesondere **unabhängig** von der speziellen Parametrisierung der Fläche. Dies folgt aus dem Transformationssatz.

Beispiel.

Für die Mantelfläche des Zylinders $Z = \mathbf{p}(K)$ mit

$$K := [0, 2\pi] \times [0, H] \subset \mathbb{R}^2$$

und

$$\mathbf{x} = \mathbf{p}(\varphi, z) := \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \qquad \text{für } (\varphi, z) \in \mathbb{R}^2$$

erhält man mit

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial z} \right\| = r$$

den Wert

$$O(Z) = \int_Z do = \int_K r d(\varphi, z) = \int_0^{2\pi} \int_0^H r dz d\varphi = 2\pi r H$$