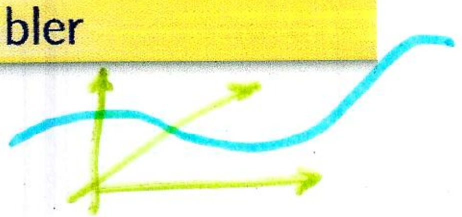
Kapitel 3. Integralrechnung mehrerer Variabler



3.2 Kurvenintegrale

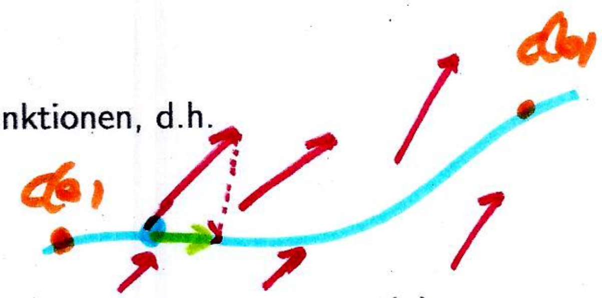
Für eine stückweise C^1–Kurve $\boxed{\mathbf{c} : [a,b] \to D,\ D \subset \mathbb{R}^n,}$ und eine stetige skalare Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ hatten wir das Kurvenintegral erster Art definiert durch

$$\int_{\mathbf{c}} f(\mathbf{x})\,ds := \int_a^b f(\mathbf{c}(t)) \overbrace{\|\dot{\mathbf{c}}(t)\|}^{\sqrt{\dot{c}_1(t)^2 + \dots + \dot{c}_n(t)^2}}\,dt$$

wobei $\|\cdot\|$ die euklidische Norm bezeichnet.

Erweiterung: Kurvenintegrale über vektorwertige Funktionen, d.h.

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x})d\mathbf{x} := ?$$



Anwendung: Ein Massenpunkt bewegt sich entlang $\mathbf{c}(t)$ in einem Kraftfeld $\mathbf{f}(\mathbf{x})$.

Frage: Welche physikalische Arbeit muss entlang der Kurve geleistet werden?

Arbeit = Kraft × ~~geschwindigkeit~~ Weg

Kurvenintegrale zweiter Art.

Definition: Für ein stetiges Vektorfeld $\boxed{\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^n,\ D \subset \mathbb{R}^n \text{ offen},}$ und eine stückweise C^1–Kurve $\mathbf{c} : [a,b] \to D$ definieren wir das Kurvenintegral zweiter Art durch

stetig stückweise diffb.

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x})d\mathbf{x} := \int_a^b \langle \mathbf{f}(\mathbf{c}(t)), \dot{\mathbf{c}}(t)\rangle\,dt$$

Herleitung: Approximiere die Kurve durch einen Streckenzug mit Ecken $\mathbf{c}(t_i)$, wobei

$$Z = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b\}$$

eine Zerlegung des Intervalls $[a,b]$ ist.

Dann gilt für die in einem Kraftfeld $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ entlang der Kurve $\mathbf{c}(t)$ geleistete Arbeit die Näherungsformel:

c(a) c(t_i) c(t_{i+1}) c(b)

$$A \approx \sum_{i=0}^{m-1} \langle \mathbf{f}(\mathbf{c}(t_i)), \mathbf{c}(t_{i+1}) - \mathbf{c}(t_i)\rangle$$

Fortsetzung der Herleitung.

Daraus folgt:

Komponente

$$A \approx \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=0}^{m-1} f_j(\mathbf{c}(t_i))(c_j(t_{i+1}) - c_j(t_i)) \cdot \cos\alpha(t_i)\,(t_{i+1} - t_i)$$

$t_{i+1} - t_i$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=0}^{m-1} f_j(\mathbf{c}(t_i))\dot{c}_j(\tau_{ij})(t_{i+1} - t_i) \cos\alpha(t_i) \to \sum_{j=1}^{n} \int_a^b f_j(c(t))\,\dot{c}_j(t) \cos\alpha(t)\,dt$$

τ_{ij}: Zwischenstelle

Für eine Folge von Zerlegungen Z mit $\|Z\| \to 0$ konvergiert die linke Seite gegen das oben definierte Kurvenintegral zweiter Art.

Bemerkung: Für eine geschlossene Kurve $\mathbf{c}(t)$, d.h. $\mathbf{c}(a) = \mathbf{c}(b)$, schreibt man das Kurvenintegral auch als

$$\oint_c \mathbf{f}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$$

Eigenschaften des Kurvenintegrals zweiter Art.

- Linearität:

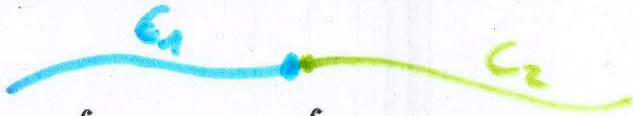
$$\int_c (\alpha\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \beta\mathbf{g}(\mathbf{x}))\,d\mathbf{x} = \alpha \int_c \mathbf{f}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} + \beta \int_c \mathbf{g}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$$

- Es gilt:

$$\int_{-c} \mathbf{f}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = -\int_{c} \mathbf{f}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x},$$

$t: a \to b$
$c: c(a) \to c(b)$
$(-c): c(b) \to c(a)$
$\dot{c}(t) = -(\dot{-c})(t)$

wobei $(-\mathbf{c})(t) := c(b + a - t)$, $a \le t \le b$, den inversen Weg bezeichnet.



- Es gilt

$$\int_{c_1+c_2} \mathbf{f}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \int_{c_1} \mathbf{f}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} + \int_{c_2} \mathbf{f}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$$

wobei $\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2$ den aus $\mathbf{c}_1$ und $\mathbf{c}_2$ zusammengesetzten Weg bezeichnet, sodass der Endpunkt von $\mathbf{c}_1$ der Anfangspunkt von $\mathbf{c}_2$ ist.

Weitere Eigenschaften des Kurvenintegrals zweiter Art.

- Das Kurvenintegral zweiter Art ist parametrisierungsinvariant. (siehe Beiblatt)
- Es gilt

$$\int_c \mathbf{f}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \int_a^b \langle \mathbf{f}(\mathbf{c}(t)), \mathbf{T}(t)\rangle \,\|\dot{\mathbf{c}}(t)\|\,dt = \int_c \langle \mathbf{f}, \mathbf{T}\rangle\,ds$$

mit dem Tangenten–Einheitsvektor $\mathbf{T}(t) := \dfrac{\dot{\mathbf{c}}(t)}{\|\dot{\mathbf{c}}(t)\|}$.

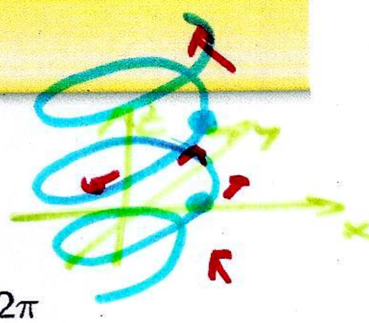
- Formale Schreibweise:

$$\int_c \mathbf{f}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \int_c \sum_{i=1}^n f_i(\mathbf{x})\,dx_i = \sum_{i=1}^n \int_c f_i(\mathbf{x})\,dx_i$$

mit

$$\int_c f_i(\mathbf{x})\,dx_i := \int_a^b f_i(\mathbf{c}(t))\dot{c}_i(t)\,dt$$

Beispiel.



Für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ sei

$$\begin{aligned}\mathbf{f}(\mathbf{x}) &:= (-y, x, z^2)^T \\ \mathbf{c}(t) &:= (\cos t, \sin t, at)^T \qquad \text{mit } 0 \le t \le 2\pi\end{aligned}$$

Dann berechnet man

$$\begin{aligned}\int_c \mathbf{f}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} &= \int_c (-y dx + x dy + z^2 dz) \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sin t)(-\sin t) + \cos t \cos t + a^2 t^2 a)\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} (1 + a^3 t^2)\,dt \\ &= 2\pi + \frac{a^3}{3}(2\pi)^3\end{aligned}$$

$$\int_{c} f(x)\,dx = \boxed{\int_a^b \langle f(c(t)), \dot{c}(t)\rangle\, dt} = \begin{bmatrix} t = \rho(s) \\ [a,b] \to [\rho^{-1}(a), \rho^{-1}(b)] \\ dt = \frac{d\rho}{ds}\, ds \end{bmatrix}$$

$$c(t) = c(\rho(s)) = \tilde{c}(s)$$

Transformationssatz

$$= \int_{\rho^{-1}(a)}^{\rho^{-1}(b)} \left\langle f(c(\rho(s))), \frac{d}{dt} c(\rho(s)) \right\rangle \frac{d\rho}{ds}\, ds =$$

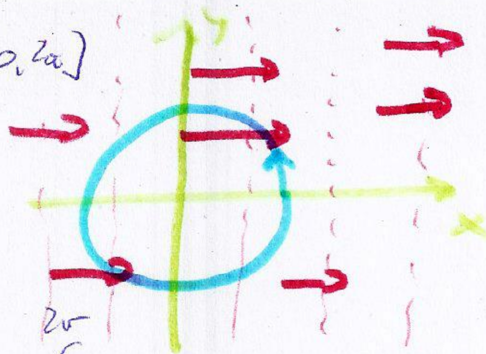
$$= \int_{\rho^{-1}(a)}^{\rho^{-1}(b)} \Big\langle f(c(\rho(s))), \underbrace{\frac{d}{dt} c(\rho(s)) \cdot \frac{d\rho}{ds}}_{\frac{d}{ds} c(\rho(s)) = \frac{d}{ds} \tilde{c}(s) = \tilde{c}'(s)} \Big\rangle\, ds =$$

$$= \boxed{\int_{\rho^{-1}(a)}^{\rho^{-1}(b)} \langle f(\tilde{c}(s)), \tilde{c}'(s) \rangle\, ds}$$

Bspl: $f = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \nabla x$ $\quad c(t) = \begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}$ $\quad t \in [0, 2\pi]$

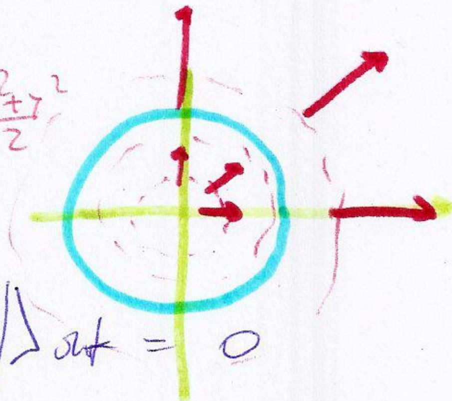
$\varphi(x) = x$

$\dot c(t) = \begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}$



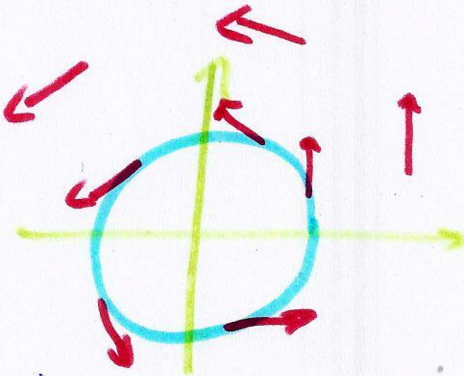
$$\int_C f(x)\,dx = \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix} \right\rangle dt = \int_0^{2\pi} -\sin t \, dt = 0$$

Bspl. $f = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \nabla\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)$ $\quad \varphi(x,y) = \frac{x^2+y^2}{2}$



$$\int_C f(x)\,dx = \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix} \right\rangle dt = 0$$

Bspl $f = \begin{pmatrix}-y\\x\end{pmatrix} = ?$ $\quad \nexists \varphi$ $\quad f = \nabla\varphi$

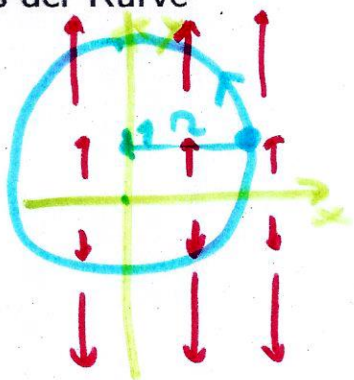


$$\int_C f(x)\,dx = \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix} \right\rangle dt = 2\pi$$

Die Zirkulation eines Feldes längs einer Kurve.

Definition: Ist $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ ein Geschwindigkeitsfeld eines strömenden Mediums, so nennt man das Kurvenintegral $\oint_c \mathbf{u}(\mathbf{x})dx$ entlang einer geschlossenen Kurve auch die Zirkulation des Feldes $\mathbf{u}(\mathbf{x})$.

Beispiel: Für das Feld $\mathbf{u}(x,y) = (y,0)^T \in \mathbb{R}^2$ erhält man längs der Kurve $\mathbf{c}(t) = (r\cos t, 1 + r\sin t)^T$, $0 \le t \le 2\pi$ die Zirkulation



$$\begin{aligned}
\oint_c \mathbf{u}(\mathbf{x})\,dx &= \int_0^{2\pi} (1 + r\sin t)(-r\sin t)dt \\
&= \int_0^{2\pi} (-r\sin t - r^2\sin^2 t)dt \\
&= \left[r\cos t - \frac{r^2}{2}(t - \sin t\cos t) \right]_0^{2\pi} = -\pi r^2
\end{aligned}$$

Wirbelfreie Vektorfelder.

Definition: Ein stetiges Vektorfeld $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in D \subset \mathbb{R}^n$, heißt wirbelfrei, falls dessen Kurvenintegral längs aller geschlossenen stückweise C^1–Kurven $\mathbf{c}(t)$ in D verschwindet, d.h.

$$\oint_c \mathbf{f}(\mathbf{x})\,dx = 0 \qquad \text{für alle geschlossenen } \mathbf{c}.$$

nicht ~~wirbelfrei~~ wegunabhängig $0 \neq \int_{c_1} f(x)dx - \int_{c_2} f(x)dx = \int_{c_1} f\,dx + \int_{-c_2} f\,dx = \oint_{c_1-c_2} f(x)dx$

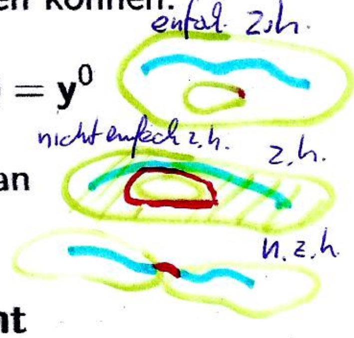
Bemerkung: Ein Vektorfeld ist genau dann wirbelfrei, wenn der Wert des Kurvenintegrals $\int_c \mathbf{f}(\mathbf{x})dx$ nur vom Anfangs– und Endpunkt des Weges, jedoch nicht vom konkreten Verlauf der Kurve $\mathbf{c}$ abhängt. In diesem Fall nennt man das Kurvenintegral wegunabhängig.

Frage: Welche Kriterien für das Vektorfeld $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ garantieren die Wegunabhängigkeit des Kurvenintegrals?

Zusammenhängende Mengen.

Definition: Eine Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt zusammenhängend, falls je zwei Punkte in D durch eine stückweise C^1–Kurve verbunden werden können:

$$\forall \mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0 \in D \ : \ \exists \mathbf{c} : [a,b] \to D \quad : \quad \mathbf{c}(a) = \mathbf{x}^0 \ \wedge \ \mathbf{c}(b) = \mathbf{y}^0$$



Eine offene und zusammenhängende Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ nennt man auch ein Gebiet in $\mathbb{R}^n$.

Bemerkung: Eine **offene** Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann **nicht** zusammenhängend, wenn es **disjunkte**, offene Mengen $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^n$ gibt mit

$$U_1 \cap D \neq \emptyset, \quad U_2 \cap D \neq \emptyset, \quad D \subset U_1 \cup U_2$$

Nicht zusammenhängende offene Mengen sind also – im Gegensatz zu zusammenhängenden Mengen – in (zumindest) zwei disjunkte offene Mengen trennbar.

einfach z.h.: jede geschlossene Kurve in D kann glatt auf einen Punkt zusammengezogen werden

Gradientenfelder, Stammfunktionen, Potentiale.

Definition: Sei $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld auf einem Gebiet $D \subset \mathbb{R}^n$. Das Vektorfeld nennt man ein Gradientenfeld, falls es eine skalare C^1–Funktion $\varphi : D \to \mathbb{R}$ gibt mit

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \nabla \varphi(\mathbf{x})$$

Die Funktion $\varphi(\mathbf{x})$ heißt dann Stammfunktion oder Potential von $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, und das Vektorfeld $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ nennt man konservativ.

Bemerkung: Ein Massenpunkt bewege sich in einem konservativen Kraftfeld $\mathbf{K}(\mathbf{x})$, d.h. $\mathbf{K}$ besitzt ein Potential $\varphi(\mathbf{x})$, sodass $\mathbf{K}(\mathbf{x}) = \nabla\varphi(\mathbf{x})$. Dann liefert die Funktion $U(\mathbf{x}) = -\varphi(\mathbf{x})$ gerade die potentielle Energie:

$\boxed{m\ddot{x} + \nabla U = 0} \ / \dot{x}$

Kraft   Masse × Beschleunigung

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}) \underset{\text{Newton}}{=} m\ddot{\mathbf{x}} = -\nabla U(\mathbf{x}) = \nabla\varphi(x)$$

Multipliziert man diese Beziehung mit $\dot{\mathbf{x}}$, so folgt

$m\langle \ddot{x}, \dot{x}\rangle = m \dfrac{\langle \dot{x}, \dot{x}\rangle'}{2}$ $\nabla U(x)\dot{x} = \frac{d}{dt} U(x)$ kinetische Energie, potentielle –"–

$$m\langle \ddot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}}\rangle + \langle \nabla U(\mathbf{x}), \dot{\mathbf{x}}\rangle = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\underbrace{\|\dot{\mathbf{x}}\|^2}_{\langle \dot{x}, \dot{x}\rangle} + U(\mathbf{x})\right) = 0$$

Energieerhaltung (weil konservativ)

Hauptsatz für Kurvenintegrale.

Satz: (Hauptsatz für Kurvenintegrale)

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ ein stetiges Vektorfeld auf D.

1) Besitzt $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ ein Potential $\varphi(\mathbf{x})$, so gilt für alle stückweisen $\mathcal{C}^1$–Kurven $\mathbf{c} : [a, b] \to D$:

$$\int_c \mathbf{f}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{c}(b)) - \varphi(\mathbf{c}(a))$$

Insbesondere ist das Kurvenintegral wegunabhängig und $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ ist wirbelfrei.

2) Umgekehrt gilt: Ist $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ wirbelfrei, so besitzt $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ ein Potential $\varphi(\mathbf{x})$. Ist $\mathbf{x}^0 \in D$ ein fester Punkt, und bezeichnet $\mathbf{c}_\mathbf{x}$ (für $\mathbf{x} \in D$) eine beliebige, die Punkte $\mathbf{x}^0$ und $\mathbf{x}$ verbindende stückweise $\mathcal{C}^1$–Kurve in D, so ist $\varphi(\mathbf{x})$ gegeben durch:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \int_{c_x} \mathbf{f}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} + \text{const.}$$

Beispiel I.

Das zentrale Kraftfeld

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}) := \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^3} = \frac{1}{\|x\|^2}\frac{x}{\|x\|} = \frac{1}{r^2}\frac{x}{\|x\|}$$

Gravitation (bis auf Vorzeichen)

elektrische Abst.

Coulomb.

besitzt das Potential

$$U(\mathbf{x}) = -\frac{1}{\|\mathbf{x}\|} = -(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-1/2}$$

denn es gilt

$$= -\nabla\frac{1}{r} = \frac{1}{r^{3/2}}x$$

$$\nabla U(\mathbf{x}) = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-3/2}(x, y, z)^T = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^3}$$

Für die längs einer stückweisen $\mathcal{C}^1$–Kurve $\mathbf{c} : [a, b] \to \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ geleistete Arbeit gilt dann

$$A = \int_c \mathbf{K}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \left(\frac{1}{\|\mathbf{c}(a)\|} - \frac{1}{\|\mathbf{c}(b)\|}\right)$$

Beispiel II.

Das Vektorfeld

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} 2xy + z^3 \\ x^2 + 3z \\ 3xz^2 + 3y \end{pmatrix}$$

besitzt das Potential

$$\varphi(\mathbf{x}) = x^2y + xz^3 + 3yz$$

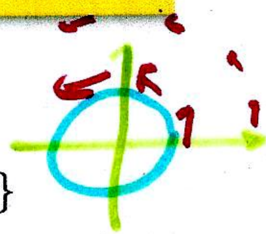
Für eine beliebige C^1–Kurve $\mathbf{c}(t)$ von $P = (1, 1, 2)$ nach $Q = (3, 5, -2)$ gilt

$$\int_c \mathbf{f}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \varphi(Q) - \varphi(P) = -9 - 15 = -24$$

Interpretiert man $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ als elektrisches Feld, so gibt das Kurvenintegral zweiter Art die Spannung zwischen den beiden Punkten P und Q an.

Beispiel III.

Wir betrachten das Vektorfeld



$$\mathbf{f}(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \qquad \text{mit } (x, y)^T \in D = \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$$

Für den Einheitskreis $\mathbf{c}(t) := (\cos t, \sin t)^T$, $0 \le t \le 2\pi$, bekommt man

$$\begin{aligned}
\int_c \mathbf{f}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} &= \int_0^{2\pi} \langle \mathbf{f}(\mathbf{c}(t)), \dot{\mathbf{c}}(t) \rangle\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \right\rangle dt \\
&= \int_0^{2\pi} 1\, dt = 2\pi
\end{aligned}$$

$\mathbf{f}(x, y)$ ist somit nicht wirbelfrei und besitzt auf D kein Potential.