

Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Ingenuin Gasser

Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg

Technische Universität Hamburg–Harburg
Wintersemester 2021/22

basierend auf dem Foliensatz von Jens Struckmeier Wintersemester 2020/21

Inhalte der Vorlesung Analysis III.

- 1 Partielle Ableitungen, Differentialoperatoren.
- 2 Vektorfelder, vollständiges Differential, Richtungsableitungen.
- 3 Mittelwertsätze, Satz von Taylor.
- 4 Extrema, Satz über implizite Funktionen.
- 5 Implizite Darstellung von Kurven und Flächen.
- 6 Extrema bei Gleichungsnebenbedingungen.
- 7 Newton–Verfahren, nichtlineare Gleichungen und Ausgleichsrechnung.
- 8 Bereichsintegrale, Satz von Fubini, Transformationssatz.
- 9 Potentiale, Integralsatz von Green, Integralsatz von Gauß.
- 10 Greensche Formeln, Integralsatz von Stokes.

Kapitel 1. Differentialrechnung mehrerer Variablen

1.1 Partielle Ableitungen

Im Folgenden sei

$f(x_1, \dots, x_n)$ eine skalare Funktion, die von n Variablen abhängt

Beispiel: Die Zustandsgleichung eines idealen Gases lautet $pV = RT$.

Jede der drei Größen p (Druck), V (Volumen) und T (Temperatur) läßt sich als Funktion der anderen darstellen, wobei R die universelle Gaskonstante ist.

$$p = p(V, T) = \frac{RT}{V}$$

$$V = V(p, T) = \frac{RT}{p}$$

$$T = T(p, V) = \frac{pV}{R}$$

1.1. Partielle Ableitungen

Definition: Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $x^0 \in D$.

- $f(x)$ heißt in x^0 nach x_i **partiell differenzierbar**, falls der Grenzwert

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) &:= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x^0 + te_i) - f(x^0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_1^0, \dots, x_i^0 + t, \dots, x_n^0) - f(x_1^0, \dots, x_i^0, \dots, x_n^0)}{t}\end{aligned}$$

existiert, wobei e_i den i -ten Einheitsvektor bezeichnet. Den Grenzwert nennt man die **partielle Ableitung** von $f(x)$ nach x_i im Punkt x^0 .

- Existieren für jeden Punkt x^0 die partiellen Ableitungen nach jeder Variablen x_i , $i = 1, \dots, n$ und sind diese **stetige Funktionen**, so nennt man $f(x)$ **stetig partiell differenzierbar** oder eine **C^1 -Funktion**.

Beispiele.

- Betrachte die Funktion

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

Für einen Punkt $x^0 \in \mathbb{R}^2$ existieren beide partiellen Ableitungen und diese sind auch stetig:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0) = 2x_1, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x^0) = 2x_2$$

Die Funktion ist also eine \mathcal{C}^1 -Funktion.

- Die Funktion

$$f(x_1, x_2) = x_1 + |x_2|$$

ist im Punkt $x^0 = (0, 0)^T$ partiell differenzierbar nach der Koordinate x_1 , aber die partielle Ableitung nach x_2 existiert im Ursprung **nicht!**

Konkretes technisches Beispiel.

Der Schalldruck einer eindimensionalen Schallwelle ist gegeben durch

$$p(x, t) = A \sin(\alpha x - \omega t)$$

Die partielle Ableitung

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \alpha A \cos(\alpha x - \omega t)$$

beschreibt zu einer festen Zeit t die **örtliche** Änderungsrate des Schalldrucks.

Die partielle Ableitung

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\omega A \cos(\alpha x - \omega t)$$

beschreibt für einen festen Ort x die **zeitliche** Änderung des Schalldruckes.

Differentiationsregeln

- Sind f, g partiell nach x_i differenzierbar, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so gelten die Regeln

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) + \beta \frac{\partial g}{\partial x_i}(x)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (f(x) \cdot g(x)) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}(x)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}(x)}{g(x)^2} \quad \text{für } g(x) \neq 0$$

- Man verwendet alternativ die Bezeichnungen:

$$D_i f(x^0) \quad \text{oder} \quad f_{x_i}(x^0)$$

für die partielle Ableitung von $f(x)$ nach x_i in x^0 .

Gradient und Nabla-Operator.

Definition: Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, und partiell differenzierbar.

- Man bezeichnet den **Zeilenvektor**

$$\text{grad } f(x^0) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^0) \right)$$

als **Gradient** von $f(x)$ in x^0 .

- Weiterhin bezeichnet man den symbolischen Vektor

$$\nabla := \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^T$$

als **Nabla-Operator**.

- So bekommt man den **Spaltenvektor**

$$\nabla f(x^0) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^0) \right)^T$$

Weitere Differentiationsregeln.

Seien $f(x)$ und $g(x)$ partiell differenzierbar. Dann gelten die folgenden **Differentiationsregeln**:

$$\text{grad}(\alpha f + \beta g) = \alpha \cdot \text{grad} f + \beta \cdot \text{grad} g$$

$$\text{grad}(f \cdot g) = g \cdot \text{grad} f + f \cdot \text{grad} g$$

$$\text{grad} \left(\frac{f}{g} \right) = \frac{1}{g^2} (g \cdot \text{grad} f - f \cdot \text{grad} g), \quad g \neq 0$$

Beispiele:

- Sei $f(x, y) = e^x \cdot \sin y$. Dann gilt:

$$\text{grad} f(x, y) = (e^x \cdot \sin y, e^x \cdot \cos y) = e^x (\sin y, \cos y)$$

- Für $r(x) := \|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ gilt

$$\text{grad} r(x) = \frac{x}{r(x)} = \frac{x}{\|x\|_2} \quad \text{für } x \neq 0,$$

wobei $x = (x_1, \dots, x_n)$ Zeilenvektor.

Partiell differenzierbar impliziert nicht Stetigkeit.

Beobachtung: Eine (nach allen Koordinaten) partiell differenzierbare Funktion ist nicht notwendigerweise eine **stetige** Funktion.

Beispiel: Betrachte die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{x \cdot y}{(x^2 + y^2)^2} & : \text{für } (x, y) \neq 0 \\ 0 & : \text{für } (x, y) = 0 \end{cases}$$

Die Funktion ist auf **ganz** \mathbb{R}^2 partiell differenzierbar, und es gilt

$$f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y}{(x^2 + y^2)^2} - 4 \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^3}, \quad (x, y) \neq (0, 0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x}{(x^2 + y^2)^2} - 4 \frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^3}, \quad (x, y) \neq (0, 0)$$

Beispiel (Fortsetzung).

Berechnung der partiellen Ableitungen im Ursprung $(0, 0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = \frac{t \cdot 0}{(t^2 + 0^2)^2} - 0 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} = \frac{0 \cdot t}{(0^2 + t^2)^2} - 0 = 0$$

Aber: Im Nullpunkt $(0, 0)$ ist die Funktion **nicht** stetig, denn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}\right)^2} = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{4}{n^4}} = \frac{n^2}{4} \rightarrow \infty$$

und somit gilt

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) \neq f(0, 0) = 0$$

Beschränktheit der Ableitungen impliziert Stetigkeit.

Um die Stetigkeit einer partiell differenzierbaren Funktion zu garantieren, benötigt man zusätzliche Voraussetzungen an f .

Satz: Ist $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, in einer Umgebung von $x^0 \in D$ partiell differenzierbar, und sind die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n$, dort **beschränkt**, so ist $f(x)$ **stetig** in x^0 .

Beachte: In unserem vorigem Beispiel sind die partiellen Ableitungen in einer Umgebung der Null $(0, 0)$ **nicht** beschränkt, denn es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y}{(x^2 + y^2)^2} - 4 \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^3} \quad \text{für } (x, y) \neq (0, 0)$$

Beweis des Satzes.

Für $\|x - x^0\|_\infty < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ hinreichend klein, schreiben wir:

$$\begin{aligned} f(x) - f(x^0) &= (f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) - f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n^0)) \\ &+ (f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n^0) - f(x_1, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}^0, x_n^0)) \\ &\vdots \\ &+ (f(x_1, x_2^0, \dots, x_n^0) - f(x_1^0, \dots, x_n^0)) \end{aligned}$$

Für jede Differenz auf der linken Seite, betrachten wir f als univariate Funktion:

$$g(x_n) - g(x_n^0) := f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) - f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n^0)$$

Da f partiell differenzierbar, ist g differenzierbar und es gilt der Mittelwertsatz:

$$g(x_n) - g(x_n^0) = g'(\xi_n)(x_n - x_n^0)$$

für ein geeignetes ξ_n zwischen x_n und x_n^0 .

Beweis des Satzes (Fortsetzung).

Anwendung des **Mittelwertsatzes** auf jeden Term der rechten Seite ergibt somit

$$\begin{aligned} f(x) - f(x^0) &= \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, \xi_n) \cdot (x_n - x_n^0) \\ &+ \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}(x_1, \dots, x_{n-2}, \xi_{n-1}, x_n^0) \cdot (x_{n-1} - x_{n-1}^0) \\ &\vdots \\ &+ \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, x_2^0, \dots, x_n^0) \cdot (x_1 - x_1^0) \end{aligned}$$

Mit der Beschränktheit der partiellen Ableitungen gilt

$$|f(x) - f(x^0)| \leq C_1|x_1 - x_1^0| + \dots + C_n|x_n - x_n^0|$$

für $\|x - x^0\|_\infty < \varepsilon$, und damit ist $f(x)$ **stetig** in x^0 , denn es gilt

$$f(x) \rightarrow f(x^0) \quad \text{für } \|x - x^0\|_\infty \rightarrow 0$$

Höhere Ableitungen.

Definition: Eine skalare Funktion $f(x)$ sei auf einer offenen Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ partiell differenzierbar. Sind die partiellen Ableitungen erneut partiell differenzierbar, so erhält man sämtliche **partiellen Ableitungen zweiter Ordnung** von f mit

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} := \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)$$

Beispiel: Partielle Ableitungen zweiter Ordnung einer Funktion $f(x, y)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Seien nun $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$. Dann definiert man rekursiv

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k-1}} \dots \partial x_{i_1}} := \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} \left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_{k-1}} \partial x_{i_{k-2}} \dots \partial x_{i_1}} \right)$$

Ableitungen höherer Ordnung.

Definition: Die Funktion $f(x)$ heißt k -fach partiell differenzierbar, falls alle Ableitungen der Ordnung k ,

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k-1}} \dots \partial x_{i_1}} \quad \text{für alle } i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\},$$

auf D existieren.

Alternative Notationen:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k-1}} \dots \partial x_{i_1}} = D_{i_k} D_{i_{k-1}} \dots D_{i_1} f = f_{x_{i_1} \dots x_{i_k}}$$

Sind alle Ableitungen k -ter Ordnung stetig, so heißt die Funktion $f(x)$ k -fach stetig partiell differenzierbar oder auch C^k -Funktion auf D . Stetige Funktionen $f(x)$ nennt man auch C^0 -Funktionen.

Beispiel: Für die Funktion $f(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n x_i^i$ gilt $\frac{\partial^n f}{\partial x_n \dots \partial x_1} = ?$

Partielle Ableitungen sind nicht beliebig vertauschbar.

ACHTUNG: Die Reihenfolge, in der die partiellen Ableitungen durchzuführen sind, ist im Allgemeinen **nicht** beliebig vertauschbar!

Beispiel: Für die Funktion

$$f(x, y) := \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & : \text{ für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & : \text{ für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

berechnet man direkt

$$f_{xy}(0, 0) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \right) = -1$$

$$f_{yx}(0, 0) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \right) = +1$$

d.h. $f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$.

Vertauschbarkeitssatz von Schwarz.

Satz: Ist $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, eine C^2 -Funktion, so gilt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_1, \dots, x_n)$$

für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Beweisidee:

Zweifache Anwendung des Mittelwertsatzes.

Folgerung:

Ist $f(x)$ eine C^k -Funktion, so kann man die Reihenfolge der Differentiationen zur Berechnung der partiellen Ableitungen bis zur k -ten Ordnung **beliebig** vertauschen!

Beispiel zur Vertauschbarkeit partieller Ableitungen.

Berechne für die Funktion

$$f(x, y, z) = y^2 z \sin(x^3) + (\cosh y + 17e^{x^2})z^2$$

die partielle Ableitung dritter Ordnung f_{xyz} .

Die Reihenfolge der partiellen Ableitungen ist vertauschbar, da $f \in \mathcal{C}^3$.

- Differenziere zunächst nach z :

$$\frac{\partial f}{\partial z} = y^2 \sin(x^3) + 2z(\cosh y + 17e^{x^2})$$

- Differenziere dann f_z nach x (damit fällt $\cosh y$ raus):

$$\begin{aligned} f_{zx} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(y^2 \sin(x^3) + 2z(\cosh y + 17e^{x^2}) \right) \\ &= 3x^2 y^2 \cos(x^3) + 68xze^{x^2} \end{aligned}$$

- Für die partielle Ableitung von f_{zx} nach y erhalten wir schließlich

$$f_{xyz} = 6x^2 y \cos(x^3)$$

Der Laplace-Operator.

Der Laplace-Operator ist definiert durch

$$\Delta := \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

Für eine skalare Funktion $u(x) = u(x_1, \dots, x_n)$ gilt somit

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = u_{x_1 x_1} + \dots + u_{x_n x_n}$$

Beispiele für wichtige partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung:

$$\Delta u - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0 \quad (\text{Wellengleichung})$$

$$\Delta u - \frac{1}{k} u_t = 0 \quad (\text{Wärmeleitungsgleichung})$$

$$\Delta u = 0 \quad (\text{Laplace-Gleichung oder Potentialgleichung})$$

Vektorwertige Funktionen.

Definition: Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f = (\underline{f_1}, \dots, \underline{f_m})^T$, eine vektorwertige Funktion.

Die Funktion f heißt **partiell differenzierbar** in $x^0 \in D$, falls für alle $i = 1, \dots, n$ die Grenzwerte

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x^0 + te_i) - f(x^0)}{t}$$

$(0, \dots, 1, \dots, 0)$
i-te Komp.
in Komponenten

existieren. Die Berechnung erfolgt komponentenweise

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_i} \end{pmatrix} \quad \text{für } i = 1, \dots, n$$

Vorsicht: $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$\text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

Vektorfelder.

Definition: Für $m = n$ nennt man die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein **Vektorfeld** auf D . Ist jede Koordinatenfunktion $f_i(x)$ von $f = (f_1, \dots, f_n)^T$ eine C^k -Funktion, so nennt man f ein **C^k -Vektorfeld**. $n=1=m$

Beispiele für Vektorfelder:

- Geschwindigkeitsfelder von strömenden Flüssigkeiten oder Gasen;
- elektromagnetische Felder;
- Temperaturgradienten in Festkörpern.

\circledast $\text{grad} f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

Definition: Für ein partiell differenzierbares Vektorfeld $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ definiert man die **Divergenz** in $x \in D$ durch

$$\text{div } f(x^0) := \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x^0)$$

oder

$$\text{div } f(x) = \nabla^T f(x) = (\nabla, f(x))$$

$$\nabla^T = (\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n})$$

$$\begin{aligned} n=1 \quad \text{div } f &= f' \\ n=2 \quad \text{div } f &= f_{1x_1} + f_{2x_2} \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{aligned}$$

Vektorfelder.

Definition: Für $m = n$ nennt man die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein **Vektorfeld** auf D . Ist jede Koordinatenfunktion $f_i(x)$ von $f = (f_1, \dots, f_n)^T$ eine C^k -Funktion, so nennt man f ein **C^k -Vektorfeld**.

Beispiele für Vektorfelder:

- Geschwindigkeitsfelder von strömenden Flüssigkeiten oder Gasen;
- elektromagnetische Felder;
- Temperaturgradienten in Festkörpern.

Definition: Für ein partiell differenzierbares Vektorfeld $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ definiert man die **Divergenz** in $x \in D$ durch

$$\operatorname{div} f(x^0) := \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x^0)$$

oder

$$\operatorname{div} f(x) = \nabla^T f(x) = (\nabla, f(x))$$

$$f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{div} f = \frac{\partial x_1}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial x_2} = 2$$

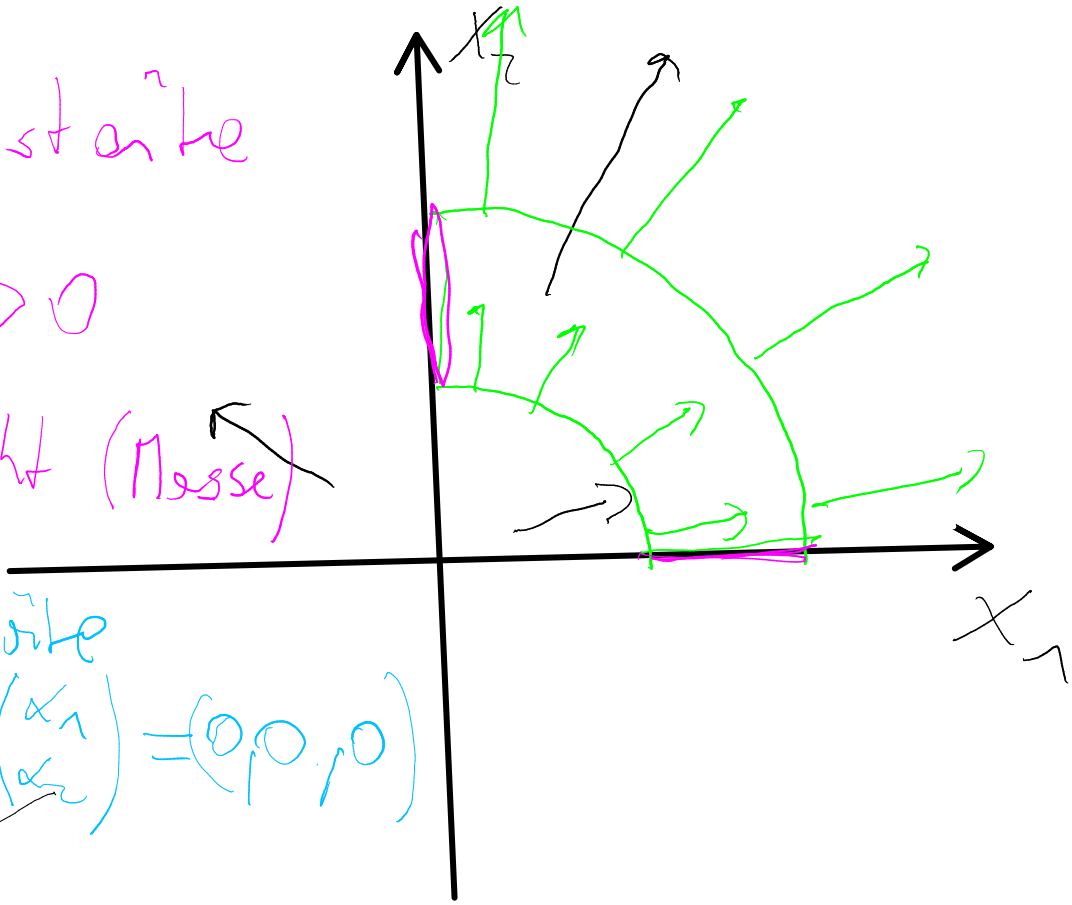
Quellstärke

$$\operatorname{div} f > 0$$

entsteht (Masse)

Wirbelstärke

$$\operatorname{rot} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (0, 0, 0)$$



$$f(x_1, x_2) = - \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{div} f = -2$$

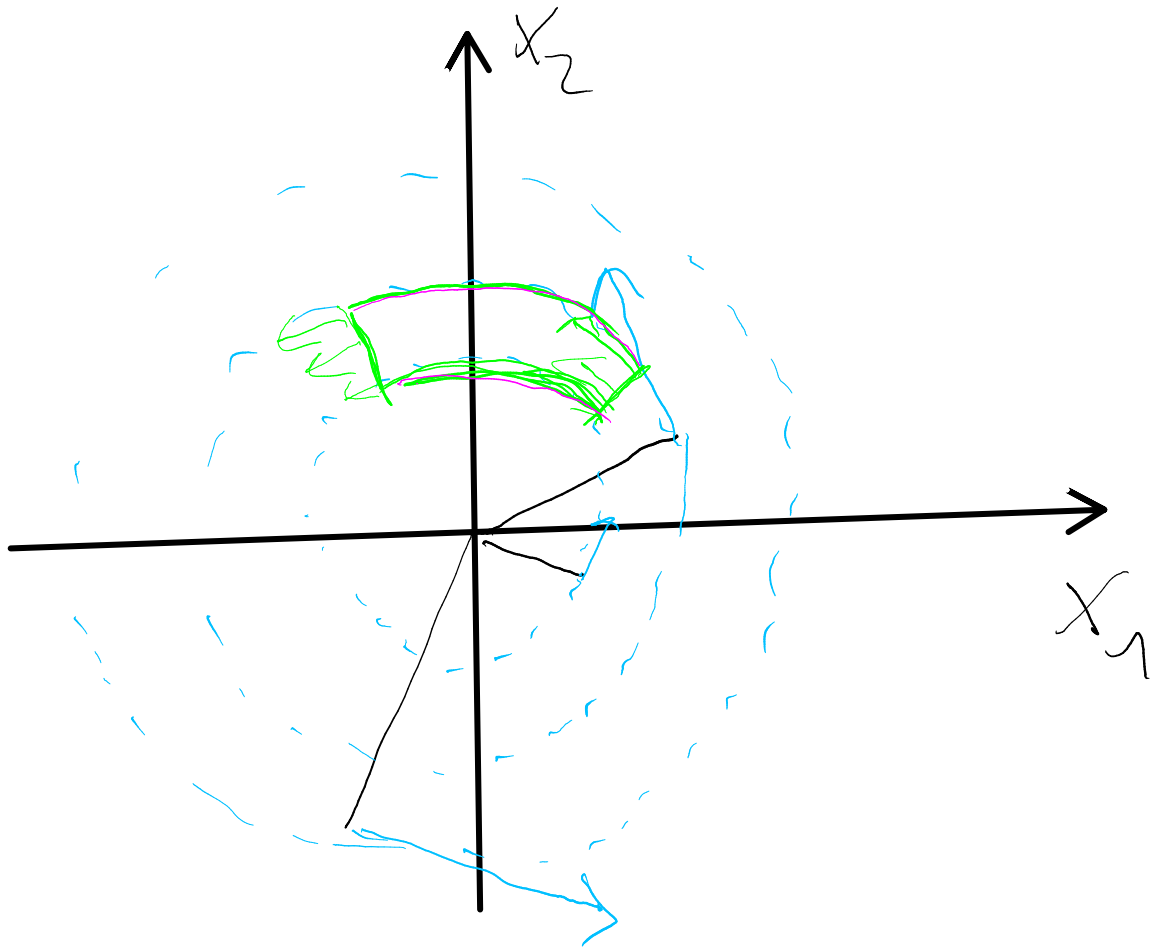
$$\operatorname{div} F = \rho$$

Massenrate



Kraftfeld

$$\operatorname{div} f = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix} \quad \operatorname{div} f = \frac{\partial x_2}{\partial x_1} - \frac{\partial x_1}{\partial x_2} = 0$$



$$\operatorname{rot} f = \operatorname{rot} \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix} = (0, 0, -1 - 1) = (0, 0, -2)$$

Rechenregeln und Rotation.

Es gelten die folgenden Rechenregeln:

$$\operatorname{div}(\alpha f + \beta g) = \alpha \operatorname{div} f + \beta \operatorname{div} g \quad \text{für } f, g : D \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\operatorname{div}(\varphi \cdot f) = (\nabla \varphi, f) + \varphi \operatorname{div} f \quad \text{für } \varphi : D \rightarrow \mathbb{R}, f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Produktregel

Bemerkung: Ist $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^2 -Funktion, so gilt für den Laplace-Operator

$$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f$$

Definition: Für ein partiell differenzierbares Vektorfeld im \mathbb{R}^3 , $f : D \rightarrow \mathbb{R}^3$, $D \subset \mathbb{R}^3$ offen, definiert man die **Rotation** durch

$$\operatorname{rot} f(x^0) := \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}, \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right)^T \Bigg|_{x^0}$$

Vektorprodukt in \mathbb{R}^3

$$a \times b = \begin{vmatrix} \boxed{e_1} & \boxed{e_2} & \boxed{e_3} \\ \boxed{a_1} & \boxed{a_2} & \boxed{a_3} \\ \boxed{b_1} & \boxed{b_2} & \boxed{b_3} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

$$\text{rot } f = \nabla \times f = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}$$

$$\text{rot}(\nabla \varphi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_{23} - \varphi_{32} \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Zd Variante

$$f = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \\ f_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{rot } f = \nabla \times f = \left(0, 0, \frac{\partial}{\partial x_1} f_2 - \frac{\partial}{\partial x_2} f_1 \right)$$

Alternativ Notationen und weitere Rechenregeln.

$$\operatorname{rot} f(x) = \nabla \times f(x) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_2} f_3 - \frac{\partial}{\partial x_3} f_2 \\ \frac{\partial}{\partial x_3} f_1 - \frac{\partial}{\partial x_1} f_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} f_2 - \frac{\partial}{\partial x_2} f_1 \end{pmatrix}$$

Bemerkung: Es gelten die folgenden Rechenregeln:

$$\operatorname{rot}(\alpha f + \beta g) = \alpha \operatorname{rot} f + \beta \operatorname{rot} g$$

$$\operatorname{rot}(\varphi \cdot f) = (\nabla \varphi) \times f + \varphi \operatorname{rot} f$$

Produktregel

Bemerkung: Ist $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^3$, eine C^2 -Funktion, so folgt

$$\operatorname{rot}(\nabla \varphi) = 0,$$

mit dem Vertauschbarkeitssatz von Schwarz, d.h. Gradientenfelder sind stets **rotationsfrei**.

1.2 Das vollständige Differential

Definition: Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x^0 \in D$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$. Die Funktion $f(x)$ heißt **differenzierbar** in x^0 (oder **vollständig differenzierbar** bzw. **total differenzierbar** in x_0), falls es eine **lineare Abbildung**

$$l(x, x^0) := A \cdot (x - x^0) \quad \text{in Vektoren}$$

$m \times n$ n

mit einer **Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$** gibt, für die die Approximationseigenschaft

$$f(x) = f(x^0) + A \cdot (x - x^0) + o(\|x - x^0\|)$$

gilt, d.h.

$$\lim_{x \rightarrow x^0} \frac{f(x) - f(x^0) - A \cdot (x - x^0)}{\|x - x^0\|} = 0.$$

Das vollständige Differential und die Jacobi-Matrix.

Bezeichnungen: Man nennt die lineare Abbildung l das **vollständige Differential** oder das **totale Differential** von $f(x)$ im Punkt x^0 , und man bezeichnet l mit $df(x^0)$.

Die zugehörige Matrix A heißt **Jacobi-Matrix** oder **Funktionalmatrix** von $f(x)$ im Punkt x^0 und wird mit $Jf(x^0)$ (manchmal auch mit $Df(x^0)$ oder $f'(x^0)$) bezeichnet.

Bemerkung: Für $m = n = 1$ erhalten wir die bekannte Beziehung

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(|x - x_0|)$$

für die Ableitung $f'(x_0)$ im Punkt x_0 .

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0}$$

Handwritten notes: $1 \times h$ and $x \rightarrow x_0$

Bemerkung: Im Fall einer skalaren Funktion ($m = 1$) ist $A = a$ ein Zeilenvektor und $a(x - x^0)$ ein Skalarprodukt $\langle a^T, x - x^0 \rangle$.

$$a = Df(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)(x_0)$$

Vollständige und partielle Differenzierbarkeit.

Satz: Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$, $x^0 \in D \subset \mathbb{R}^n$, D offen.

- a) Ist $f(x)$ in x^0 differenzierbar, so ist $f(x)$ auch stetig in x^0 .
- b) Ist $f(x)$ in x^0 differenzierbar, so ist das (vollständige) Differential und damit auch die Jacobi-Matrix eindeutig bestimmt und es gilt

$$Jf(x^0) = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x^0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x^0) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x^0) \end{pmatrix}}_h = \begin{pmatrix} Df_1(x^0) \\ \vdots \\ Df_m(x^0) \end{pmatrix}$$

- c) Ist $f(x)$ eine C^1 -Funktion auf D , so ist $f(x)$ auf D differenzierbar.

Beweis von a). f total diffbar $\rightarrow f$ stetig

$$\text{z.z. } (x \rightarrow x_0) \Rightarrow f(x) \rightarrow f(x_0)$$

Ist f in x^0 differenzierbar, so gilt nach Definition

$$\lim_{x \rightarrow x^0} \frac{f(x) - f(x^0) - A \cdot (x - x^0)}{\|x - x^0\|} = 0$$

Daraus folgt aber

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \| \frac{f(x) - f(x^0) - A \cdot (x - x^0)}{\|x - x^0\|} \| \cdot \|x - x^0\| = \lim_{x \rightarrow x_0} \| \frac{f(x) - f(x^0) - A \cdot (x - x^0)}{\|x - x^0\|} \| \cdot \|x - x^0\| = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\|f(x) - f(x^0) - A \cdot (x - x^0)\|}{\|x - x^0\|} \cdot \|x - x^0\| = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow x^0} \|f(x) - f(x^0) - A \cdot (x - x^0)\| = 0$$

und wir erhalten

$$\|f(x) - f(x^0)\| \leq \|f(x) - f(x^0) - A \cdot (x - x^0)\| + \|A \cdot (x - x^0)\|$$

$\rightarrow 0$ für $x \rightarrow x^0$

Damit ist die Funktion f stetig im Punkt x^0 .

Beweis von b).

Sei $x = x^0 + \underline{te_j}$, $|t| < \varepsilon$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Da f im Punkt x^0 differenzierbar ist, folgt

$$\lim_{x \rightarrow x^0} \frac{f(x) - f(x^0) - A \cdot (x - x^0)}{\|x - x^0\|_\infty} = 0 \quad \text{diff. in } x^0$$

Wir schreiben nun

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(x^0) - A \cdot (x - x^0)}{\|x - x^0\|_\infty} &= \frac{f(x^0 + te_j) - f(x^0) - tAe_j}{|t|} \\ &= \frac{t}{|t|} \cdot \left(\frac{f(x^0 + te_j) - f(x^0)}{t} - Ae_j \right) \\ &\rightarrow 0 \quad \text{für } t \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x^0 + te_j) - f(x^0)}{t} = Ae_j \quad i = 1, \dots, n$$

weil diffen in x
i-te Spalte von A(x-x₀)

-) partiell diffb. $f: \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$



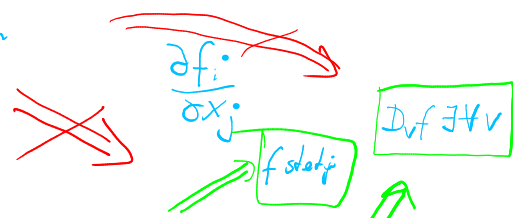
-) (totale) diffbar

$$f(x) = f(x_0) + \exists f'(x_0) \cdot (x - x_0) + o(\|x - x_0\|)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad m \times n$$

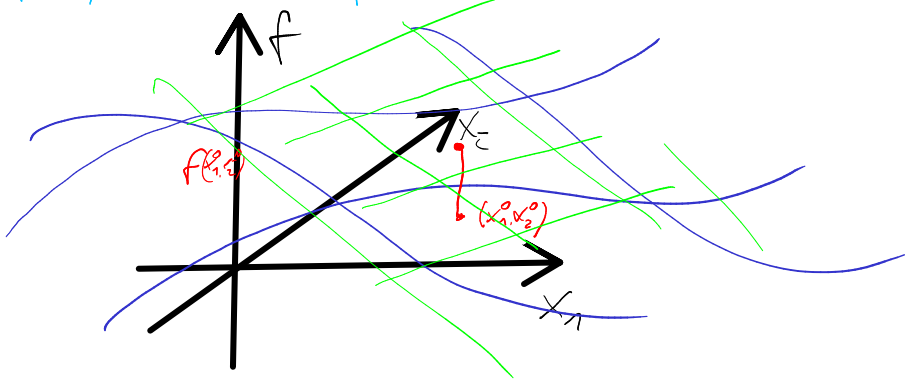


-) stetig partiell diffb.



$$f(x_1, x_2) = \dots$$

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$



Beispiele.

- Betrachte die skalare Funktion $f(x_1, x_2) = x_1 e^{2x_2}$. Dann lautet die Jacobi-Matrix:

$$Jf(x_1, x_2) = Df(x_1, x_2) = e^{2x_2} (1, 2x_1)$$

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$
$$1 \times 2$$

- Betrachte die Funktion $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 x_2 x_3 \\ \sin(x_1 + 2x_2 + 3x_3) \end{pmatrix}$$

Die Jacobi-Matrix ergibt sich in der Form

$$Jf(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 x_3 & x_1 x_3 & x_1 x_2 \\ \cos(s) & 2 \cos(s) & 3 \cos(s) \end{pmatrix}$$

2×3

wobei $s = x_1 + 2x_2 + 3x_3$.

Weitere Beispiele.

- Sei $f(x) = Ax$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $x \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$Jf(x) = A \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n$$

- Sei $f(x) = x^T Ax = \langle x, Ax \rangle$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $x \in \mathbb{R}^n$.
Dann gilt

$(x)_j = a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2 + \dots + a_{nj}x_n$
 $a_{1j}x_1 + \dots + a_{nj}x_n$
 $\frac{d}{dx_j} Ax = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} = A e_j$
↓ te Spalte von $Jf(x)$
 $j = 1, \dots, n$

$\frac{d}{dx_j} x^T = e_j^T$
 $\frac{d}{dx_j} Ax = A e_j$

ite Spalte von $Jf(x)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_j} &= \langle e_j, Ax \rangle + \langle x, A e_j \rangle \\ &= e_j^T Ax + x^T A e_j \\ &= x^T (A^T + A) e_j \end{aligned}$$

$$= (e_j^T Ax)^T = x^T A^T e_j$$

Daraus folgt

$$Jf(x) = \text{grad} f(x) = x^T (A^T + A)$$

Differentiationsregeln.

Satz:

- a) **Linearität:** Sind $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ differenzierbar in $x^0 \in D$, D offen, so ist auch $\alpha f(x^0) + \beta g(x^0)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, differenzierbar in x^0 und es gilt

$$d(\alpha f + \beta g)(x^0) = \alpha df(x^0) + \beta dg(x^0)$$

$$J(\alpha f + \beta g)(x^0) = \alpha Jf(x^0) + \beta Jg(x^0)$$

- b) **Kettenregel:** Ist $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ differenzierbar in $x^0 \in D$, D offen, und ist $g : E \rightarrow \mathbb{R}^k$ differenzierbar in $y^0 = f(x^0) \in E \subset \mathbb{R}^m$, E offen, so ist $g \circ f$ ebenfalls in x^0 differenzierbar.

Für die Differentiale gilt

$$d(\underline{g \circ f})(x^0) = \underline{dg}(y^0) \circ \underline{df}(x^0)$$

$$f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$
$$g: E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$$

$$g \circ f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$$

und analog für die Jacobi-Matrizen

$$J(g \circ f)(x^0) = Jg(y^0) \cdot Jf(x^0)$$

$k \times n$ $k \times m$ $m \times n$

Kurve Abb $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig

Bsp: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$f(t) = \begin{pmatrix} r \cos t \\ r \sin t \end{pmatrix}$$

$$t \in [0, 2\pi)$$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

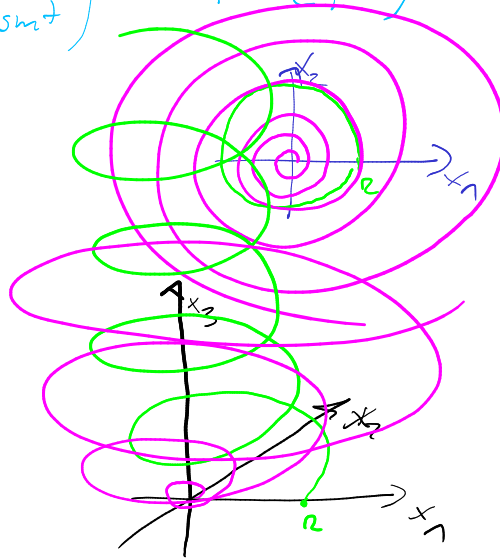
$$f(t) = \begin{pmatrix} t \cos t \\ t \sin t \end{pmatrix}$$

Bsp: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$f(t) = \begin{pmatrix} r \cos t \\ r \sin t \\ t \end{pmatrix}$$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$f(t) = \begin{pmatrix} t \cos t \\ t \sin t \\ t \end{pmatrix}$$



Beispiel zur Kettenregel.

Sei $h : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, eine in $t_0 \in I$ differenzierbare Kurve mit Werten in $D \subset \mathbb{R}^n$, D offen, und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine in $x^0 = h(t_0)$ differenzierbare skalare Funktion.

Dann ist auch die Hintereinanderausführung

$$(f \circ h)(t) = f(h_1(t), \dots, h_n(t))$$

in t_0 differenzierbar, und für die Ableitung gilt:

$$\begin{aligned} (f \circ h)'(t_0) &= Jf(h(t_0)) \cdot Jh(t_0) \\ &= \text{grad}f(h(t_0)) \cdot h'(t_0) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(h(t_0)) \cdot h'_k(t_0) \end{aligned}$$

$$h : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(f \circ h) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Richtungsableitungen.

Definition: Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x^0 \in D$, und $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ein Vektor. Dann heißt

$$f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$D_v f(x^0) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x^0 + tv) - f(x^0)}{t}$$

die **Richtungsableitung (Gateaux-Ableitung)** von $f(x)$ in Richtung v .

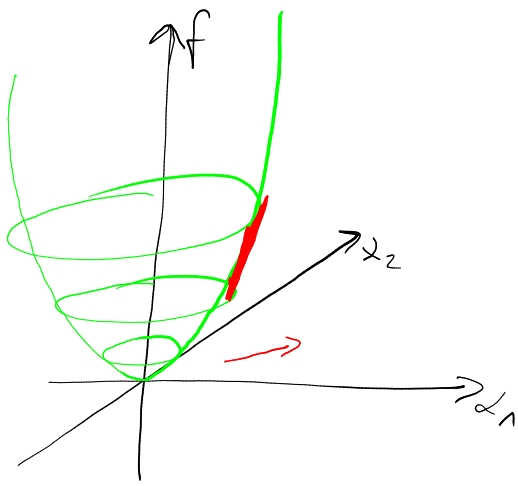
Beispiel: Sei $f(x, y) = x^2 + y^2$ und $v = (1, 1)^T$. Dann gilt für die Richtungsableitung in Richtung v :

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$D_v f(x, y) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\overbrace{(x+t)^2 + (y+t)^2}^{f(x+v \cdot t)} - \overbrace{x^2 + y^2}^{f(x)} }{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2xt + \cancel{t^2} + 2yt + \cancel{t^2}}{t}$$

$$= 2(x + y)$$



$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$



$$D_{(1,1)} f = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0+t, 0+t) - f(0,0)}{(0+t)^2 + (0+t)^2} = 0$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{t^2}{4t^4}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{4t^3} \neq$$

$$D_{(1,0)} f = \frac{\partial f}{\partial x_1}$$

$$D_{(0,1)} f = \frac{\partial f}{\partial x_2}$$

Bemerkungen.

- Für $v = e_i$ ist die Richtungsableitung in Richtung v gegeben durch die partielle Ableitung nach der Koordinatenrichtung x_i :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x^0 + e_i t) - f(x^0)}{t} = D_v f(x^0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)$$

- Ist v ein Einheitsvektor, also $\|v\| = 1$, so beschreibt die Richtungsableitung $D_v f(x^0)$ den **Anstieg** (bzw. die **Steigung**) von $f(x)$ in Richtung v .

$$h=1 \quad D_v f(x^0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x^0 + vt) - f(x^0)}{t} \cdot v = v \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x^0 + vt) - f(x^0)}{vt} = v f'(x^0)$$

- Ist $f(x)$ in x^0 differenzierbar, so existieren sämtliche Richtungsableitungen von $f(x)$ in x^0 und mit $h(t) = x^0 + tv$ gilt

$$D_v f(x^0) \stackrel{\text{Kettenregel}}{=} \frac{d}{dt} (f \circ h)|_{t=0} = \text{grad } f(x^0) \cdot v$$

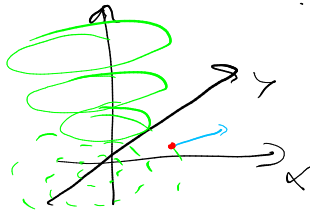
Kettenregel = $h'(t) = v$

Dies folgt unmittelbar aus der Anwendung der Kettenregel.

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} (f \circ h) \right|_{t=0} &= \left. \frac{d}{dt} f(x^0 + vt) \right|_{t=0} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(x^0 + v(t+s)) - f(x^0 + vt)}{s} \Big|_{t=0} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(x^0 + vs) - f(x^0)}{s} = \underline{D_v f(x^0)} \end{aligned}$$

$$N_{x^0} = \{x \mid f(x) = f(x^0)\}$$

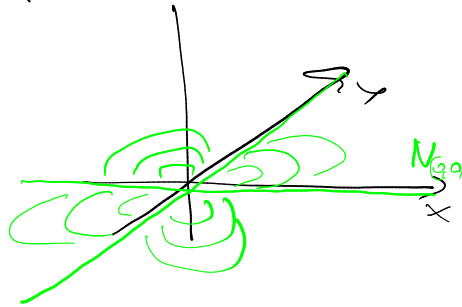
$n=2$: $f(x,y) = x^2 + y^2$



$\text{grad } f = 2(x,y)$

$N_{(2,1)} = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = f(2,1) = 5\}$

$$f'(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (0,0) \end{cases}$$



$n=3$ $\phi = \phi(r) = -\frac{1}{r}$

$N_{r_0} = \{x \mid -\frac{1}{r} = -\frac{1}{r_0}\}$

Kugeloberfläche mit Radius r_0

Eigenschaften des Gradienten.

Satz: Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, in $x^0 \in D$ differenzierbar. Dann gilt

- a) Der Gradientenvektor $\text{grad } f(x^0) \in \mathbb{R}^n$ steht senkrecht auf der Niveaumenge

$$N_{x^0} := \{x \in D \mid f(x) = f(x^0)\}$$

Im Fall $n = 2$ nennt man die Niveaumengen auch Höhenlinien, im Fall $n = 3$ heißen die Niveaumengen auch Äquipotentialflächen.

- 2) Der Gradient $\text{grad } f(x^0)$ gibt die Richtung des steilsten Anstiegs von $f(x)$ in x^0 an.

Beweisidee:

- a) Anwendung der Kettenregel. $\|v\|_2 = 1$ $|(a, b)| \leq \|a\|_2 \|b\|_2$
- b) Für beliebige Richtung v gilt mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$|D_v f(x^0)| = |(\text{grad } f(x^0), v)| \leq \|\text{grad } f(x^0)\|_2 \|v\|_2$$

Gleichheit wird für $v = \text{grad } f(x^0) / \|\text{grad } f(x^0)\|_2$ angenommen. $\|v\|_2 = 1$

Krummlinige Koordinaten.

Definition: Sei $\Phi : U \rightarrow V$, $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, eine \mathcal{C}^1 -Abbildung, für die die Jacobimatrix $J\Phi(u^0)$ an jeder Stelle $u^0 \in U$ regulär ist.

Weiterhin existiere die Umkehrabbildung $\Phi^{-1} : V \rightarrow U$ und diese sei ebenfalls eine \mathcal{C}^1 -Abbildung.

Dann definiert $x = \Phi(u)$ eine **Koordinatentransformation** von den Koordinaten u auf x .



Beispiel: Betrachte für $n = 2$ die **Polarkoordinaten** $u = (r, \varphi)$ mit $r > 0$ und $-\pi < \varphi < \pi$ und setze

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

mit den **kartesischen Koordinaten** $x = (x, y)$.

Umrechnung der partiellen Ableitungen.

Für alle $u \in U$ mit $x = \Phi(u)$ gelten die Relationen

$$\Phi^{-1}(\Phi(u)) = u$$

$$J\Phi^{-1}(x) \cdot J\Phi(u) = I_n \quad (\text{Kettenregel})$$

$$J\Phi^{-1}(x) = (J\Phi(u))^{-1}$$

Sei nun $\tilde{f} : V \rightarrow \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion und setze

$$f(u) := \tilde{f}(\Phi(u))$$

Dann folgt aus der Kettenregel:

$$\frac{\partial f}{\partial u_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_j} \frac{\partial \Phi_j}{\partial u_i} =: \sum_{j=1}^n g^{ij} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_j}$$

mit

$$g^{ij} := \frac{\partial \Phi_j}{\partial u_i}, \quad G(u) := (g^{ij}) = (J\Phi(u))^T$$

Notationen.

Wir verwenden die abkürzende Schreibweise

$$\frac{\partial}{\partial u_i} = \sum_{j=1}^n g^{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}$$

Analog lassen sich die partiellen Ableitungen nach x_i durch die partiellen Ableitungen nach u_j ausdrücken mit

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n g_{ij} \frac{\partial}{\partial u_j}$$

wobei

$$(g_{ij}) := (g^{ij})^{-1} = (J\Phi)^{-T} = (J\Phi^{-1})^T$$

Man erhält diese Beziehungen durch Anwendung der Kettenregel auf Φ^{-1} .

Beispiel: Polarkoordinaten.

Wir betrachten die Polarkoordinaten

$$x = \Phi(u) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}$$

Dann berechnet man

$$J\Phi(u) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}$$

und damit

$$(g^{ij}) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -r \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (g_{ij}) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\frac{1}{r} \sin \varphi \\ \sin \varphi & \frac{1}{r} \cos \varphi \end{pmatrix}$$

Partielle Ableitungen für die Polarkoordinaten.

Für die Umrechnung der partiellen Ableitungen bekommt man nun

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

Beispiel: Umrechnung des **Laplace-Operator** auf Polarkoordinaten

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \cos^2 \varphi \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{\sin(2\varphi)}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} + \frac{\sin^2 \varphi}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\sin(2\varphi)}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\sin^2 \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial r}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = \sin^2 \varphi \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin(2\varphi)}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} + \frac{\cos^2 \varphi}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \frac{\sin(2\varphi)}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\cos^2 \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial r}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$$

Beispiel: Kugelkoordinaten.

Wir betrachten die Kugelkoordinaten

$$x = \Phi(u) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \cos \theta \\ r \sin \varphi \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix}$$

Die Jacobi-Matrix ist dann gegeben durch:

$$J\Phi(u) = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \cos \theta & -r \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \cos \theta & r \cos \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \theta & 0 & r \cos \theta \end{pmatrix}$$

Partielle Ableitungen für die Kugelkoordinaten.

Für die Umrechnung der partiellen Ableitungen bekommt man nun

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos \varphi \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \cos \varphi \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin \varphi \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \varphi}{r \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \sin \varphi \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta}$$

Beispiel: Umrechnung des **Laplace-Operators** auf Kugelkoordinaten

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \cos^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\tan \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta}$$