Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Ingenuin Gasser

Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg

Technische Universität Hamburg–Harburg
Wintersemester 2021/22

basierend auf dem Foliensatz von Jens Struckmeier Wintersemster 2020/21

Inhalte der Vorlesung Analysis III.

1. Partielle Ableitungen, Differentialoperatoren.
2. Vektorfelder, vollständiges Differential, Richtungsableitungen.
3. Mittelwertsätze, Satz von Taylor.
4. Extrema, Satz über implizite Funktionen.
5. Implizite Darstellung von Kurven und Flächen.
6. Extrema bei Gleichungsnebenbedingungen.
7. Newton–Verfahren, nichtlineare Gleichungen und Ausgleichsrechnung.
8. Bereichsintegrale, Satz von Fubini, Transformationssatz.
9. Potentiale, Integralsatz von Green, Integralsatz von Gauß.
10. Greensche Formeln, Integralsatz von Stokes.

1.1 Partielle Ableitungen

Im Folgenden sei

$f(x_1, \ldots, x_n)$ eine skalare Funktion, die von n Variablen abhängt

Beispiel: Die Zustandsgleichung eines idealen Gases lautet $pV = RT$.

Jede der drei Größen p (Druck), V (Volumen) und T (Temperatur) läßt sich als Funktion der anderen darstellen, wobei R die universelle Gaskonstante ist.

$$\begin{aligned} p &= p(V,t) = \frac{RT}{V} \\ V &= V(p,T) = \frac{RT}{p} \\ T &= T(p,V) = \frac{pV}{R} \end{aligned}$$

Definition: Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \to \mathbb{R}$, $\mathrm{x}^0 \in D$.

- $f(\mathrm{x})$ heißt in x^0 nach x_i partiell differenzierbar, falls der Grenzwert

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathrm{x}^0) \quad &:= \quad \lim_{t\to 0} \frac{f(\mathrm{x}^0 + t\mathrm{e}_i) - f(\mathrm{x}^0)}{t} \\ &= \quad \lim_{t\to 0} \frac{f(x_1^0, \ldots, x_i^0 + t, \ldots, x_n^0) - f(x_1^0, \ldots, x_i^0, \ldots, x_n^0)}{t} \end{aligned}$$

  existiert, wobei e_i den i–ten Einheitsvektor bezeichnet. Den Grenzwert nennt man die partielle Ableitung von $f(\mathrm{x})$ nach x_i im Punkt x^0.

- Existieren für jeden Punkt x^0 die partiellen Ableitungen nach jeder Variablen $x_i, i = 1, \ldots, n$ und sind diese **stetige Funktionen**, so nennt man $f(\mathrm{x})$ stetig partiell differenzierbar oder eine $\mathcal{C}^1$–Funktion.

Beispiele.

- Betrachte die Funktion

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

Für einen Punkt $x^0 \in \mathbb{R}^2$ existieren beide partiellen Ableitungen und diese sind auch stetig:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0) = 2x_1, \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x^0) = 2x_2$$

Die Funktion ist also eine $\mathcal{C}^1$–Funktion.

- Die Funktion

$$f(x_1, x_2) = x_1 + |x_2|$$

ist im Punkt $x^0 = (0,0)^T$ partiell differenzierbar nach der Koordinate x_1, aber die partielle Ableitung nach x_2 existiert im Ursprung **nicht**!

Konkretes technisches Beispiel.

Der Schalldruck einer eindimensionalen Schallwelle ist gegeben durch

$$p(x,t) = A\sin(\alpha x - \omega t)$$

Die partielle Ableitung

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \alpha A \cos(\alpha x - \omega t)$$

beschreibt zu einer festen Zeit t die örtliche Änderungsrate des Schalldrucks.

Die partielle Ableitung

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\omega A \cos(\alpha x - \omega t)$$

beschreibt für einen festen Ort x die zeitliche Änderung des Schalldruckes.

Differentiationsregeln

- Sind f, g partiell nach x_i differenzierbar, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so gelten die Regeln

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\alpha f(x) + \beta g(x)\Big) = \alpha \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) + \beta \frac{\partial g}{\partial x_i}(x)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(f(x) \cdot g(x)\Big) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}(x)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}(x)}{g(x)^2} \quad \text{für } g(x) \neq 0$$

- Man verwendet alternativ die Bezeichnungen:

$$D_i f(x^0) \qquad \text{oder} \qquad f_{x_i}(x^0)$$

für die partielle Ableitung von $f(x)$ nach x_i in x^0.

Gradient und Nabla–Operator.

Definition: Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, und partiell differenzierbar.

- Man bezeichnet den **Zeilenvektor**

$$\operatorname{grad} f(\mathrm{x}^0) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathrm{x}^0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathrm{x}^0) \right)$$

  als Gradient von $f(\mathrm{x})$ in x^0.

- Weiterhin bezeichnet man den symbolischen Vektor

$$\nabla := \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^T$$

  als Nabla–Operator.

- So bekommt man den **Spaltenvektor**

$$\nabla f(\mathrm{x}^0) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathrm{x}^0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathrm{x}^0) \right)^T$$

Weitere Differentiationsregeln.

Seien $f(\mathrm{x})$ und $g(\mathrm{x})$ partiell differenzierbar. Dann gelten die folgenden Differentiationsregeln:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{grad}(\alpha f + \beta g) &= \alpha \cdot \operatorname{grad} f + \beta \cdot \operatorname{grad} g \\
\operatorname{grad}(f \cdot g) &= g \cdot \operatorname{grad} f + f \cdot \operatorname{grad} g \\
\operatorname{grad}\left(\frac{f}{g}\right) &= \frac{1}{g^2}(g \cdot \operatorname{grad} f - f \cdot \operatorname{grad} g), \quad g \neq 0
\end{aligned}
$$

Beispiele:

- Sei $f(x,y) = e^x \cdot \sin y$. Dann gilt:

$$\operatorname{grad} f(x,y) = (e^x \cdot \sin y, e^x \cdot \cos y) = e^x(\sin y, \cos y)$$

- Für $r(\mathrm{x}) := \|\mathrm{x}\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ gilt

$$\operatorname{grad} r(\mathrm{x}) = \frac{\mathrm{x}}{r(\mathrm{x})} = \frac{\mathrm{x}}{\|\mathrm{x}\|_2} \qquad \text{für } \mathrm{x} \neq 0,$$

wobei $\mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ Zeilenvektor.

Partiell differenzierbar impliziert nicht Stetigkeit.

Beobachtung: Eine (nach allen Koordinaten) partiell differenzierbare Funktion ist nicht notwendigerweise eine stetige Funktion.

Beispiel: Betrachte die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x \cdot y}{(x^2+y^2)^2} & : \quad \text{für } (x,y) \neq 0 \\ 0 & : \quad \text{für } (x,y) = 0 \end{cases}$$

Die Funktion ist auf **ganz** $\mathbb{R}^2$ partiell differenzierbar, und es gilt

$$\begin{aligned} f_x(0,0) &= f_y(0,0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{y}{(x^2+y^2)^2} - 4\frac{x^2 y}{(x^2+y^2)^3}, \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{x}{(x^2+y^2)^2} - 4\frac{x y^2}{(x^2+y^2)^3}, \quad (x,y) \neq (0,0) \end{aligned}$$

Beispiel (Fortsetzung).

Berechnung der partiellen Ableitungen im Ursprung $(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \frac{\dfrac{t\cdot 0}{(t^2+0^2)^2} - 0}{t} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \frac{\dfrac{0\cdot t}{(0^2+t^2)^2} - 0}{t} = 0$$

Aber: Im Nullpunkt $(0,0)$ ist die Funktion **nicht** stetig, denn

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{4}{n^4}} = \frac{n^2}{4} \to \infty$$

und somit gilt

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \neq f(0,0) = 0$$

Beschränkheit der Ableitungen impliziert Stetigkeit.

Um die Stetigkeit einer partiell differenzierbaren Funktion zu garantieren, benötigt man zusätzliche Voraussetzungen an f.

Satz: Ist $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, in einer Umgebung von $\mathrm{x}^0 \in D$ partiell differenzierbar, und sind die partiellen Ableitungen $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, \ldots, n$, dort beschränkt, so ist $f(\mathrm{x})$ stetig in x^0.

Beachte: In unserem vorigem Beispiel sind die partiellen Ableitungen in einer Umgebung der Null $(0, 0)$ nicht beschränkt, denn es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y}{(x^2 + y^2)^2} - 4\frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^3} \quad \text{für } (x, y) \neq (0, 0)$$

Beweis des Satzes.

Für $\|\mathrm{x} - \mathrm{x}^0\|_\infty < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ hinreichend klein, schreiben wir:

$$\begin{aligned} f(\mathrm{x}) - f(\mathrm{x}^0) &= (f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) - f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n^0)) \\ &+ (f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n^0) - f(x_1, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1}^0, x_n^0)) \\ &\vdots \\ &+ (f(x_1, x_2^0, \ldots, x_n^0) - f(x_1^0, \ldots, x_n^0)) \end{aligned}$$

Für jede Differenz auf der linken Seite, betrachten wir f als univariate Funktion:

$$g(x_n) - g(x_n^0) := f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) - f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n^0)$$

Da f partiell differenzierbar, ist g differenzierbar und es gilt der Mittelwertsatz:

$$g(x_n) - g(x_n^0) = g'(\xi_n)(x_n - x_n^0)$$

für ein geeignetes ξ_n zwischen x_n und x_n^0.

Beweis des Satzes (Fortsetzung).

Anwendung des Mittelwertsatzes auf jeden Term der rechten Seite ergibt somit

$$\begin{aligned} f(\mathrm{x}) - f(\mathrm{x}^0) &= \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, \xi_n) \cdot (x_n - x_n^0) \\ &+ \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}(x_1, \dots, x_{n-2}, \xi_{n-1}, x_n^0) \cdot (x_{n-1} - x_{n-1}^0) \\ &\vdots \\ &+ \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, x_2^0, \dots, x_n^0) \cdot (x_1 - x_1^0) \end{aligned}$$

Mit der Beschrankheit der partiellen Ableitungen gilt

$$|f(\mathrm{x}) - f(\mathrm{x}^0)| \le C_1|x_1 - x_1^0| + \cdots + C_n|x_n - x_n^0|$$

für $\|\mathrm{x} - \mathrm{x}^0\|_\infty < \varepsilon$, und damit ist $f(\mathrm{x})$ stetig in x^0, denn es gilt

$$f(\mathrm{x}) \to f(\mathrm{x}^0) \qquad \text{für } \|\mathrm{x} - \mathrm{x}^0\|_\infty \to 0$$

Höhere Ableitungen.

Definition: Eine skalare Funktion $f(x)$ sei auf einer offenen Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ partiell differenzierbar. Sind die partiellen Ableitungen erneut partiell differenzierbar, so erhält man sämtliche partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von f mit

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} := \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$$

Beispiel: Partielle Ableitungen zweiter Ordnung einer Funktion $f(x, y)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Seien nun $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$. Dann definiert man rekursiv

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k-1}} \ldots \partial x_{i_1}} := \frac{\partial}{\partial x_{i_k}}\left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_{k-1}} \partial x_{i_{k-2}} \ldots \partial x_{i_1}}\right)$$

Ableitungen höherer Ordnung.

Definition: Die Funktion $f(\mathrm{x})$ heißt k–fach partiell differenzierbar, falls alle Ableitungen der Ordnung k,

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k-1}} \dots \partial x_{i_1}} \qquad \text{für alle } i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\},$$

auf D existieren.

Alternative Notationen:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k-1}} \dots \partial x_{i_1}} = D_{i_k} D_{i_{k-1}} \dots D_{i_1} f = f_{x_{i_1} \dots x_{i_k}}$$

Sind alle Ableitungen k–ter Ordnung stetig, so heißt die Funktion $f(\mathrm{x})$ k–fach stetig partiell differenzierbar oder auch $\mathcal{C}^k$–Funktion auf D. Stetige Funktionen $f(\mathrm{x})$ nennt man auch $\mathcal{C}^0$–Funktionen.

Beispiel: Für die Funktion $f(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} x_i^i$ gilt $\frac{\partial^n f}{\partial x_n \dots \partial x_1} = ?$

Partielle Ableitungen sind nicht beliebig vertauschbar.

ACHTUNG: Die Reihenfolge, in der die partiellen Ableitungen durchzuführen sind, ist im Allgemeinen nicht beliebig vertauschbar!

Beispiel: Für die Funktion

$$f(x,y) := \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & : \quad \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & : \quad \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

berechnet man direkt

$$\begin{aligned} f_{xy}(0,0) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right) = -1 \\ f_{yx}(0,0) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right) = +1 \end{aligned}$$

d.h. $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$.

Vertauschbarkeitssatz von Schwarz.

Satz: Ist $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, eine $\mathcal{C}^2$–Funktion, so gilt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_1, \ldots, x_n)$$

für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

Beweisidee:

Zweifache Anwendung des Mittelwertsatzes.

Folgerung:

Ist $f(x)$ eine C^k–Funktion, so kann man die Reihenfolge der Differentiationen zur Berechnung der partiellen Ableitungen bis zur k–ten Ordnung beliebig vertauschen!

Beispiel zur Vertauschbarkeit partieller Ableitungen.

Berechne für die Funktion

$$f(x, y, z) = y^2 z \sin(x^3) + (\cosh y + 17e^{x^2})z^2$$

die partielle Ableitung dritter Ordnung f_{xyz}.

Die Reihenfolge der partiellen Ableitungen ist vertauschbar, da $f \in \mathcal{C}^3$.

- Differenziere zunächst nach z:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = y^2 \sin(x^3) + 2z(\cosh y + 17e^{x^2})$$

- Differenziere dann f_z nach x (damit fällt $\cosh y$ raus):

$$\begin{aligned} f_{zx} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(y^2 \sin(x^3) + 2z(\cosh y + 17e^{x^2})\right) \\ &= 3x^2y^2\cos(x^3) + 68xze^{x^2} \end{aligned}$$

- Für die partielle Ableitung von f_{zx} nach y erhalten wir schließlich

$$f_{xyz} = 6x^2 y \cos(x^3)$$

Der Laplace–Operator.

Der Laplace–Operator ist definiert durch

$$\Delta := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

Für eine skalare Funktion $u(x) = u(x_1, \ldots, x_n)$ gilt somit

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = u_{x_1 x_1} + \cdots + u_{x_n x_n}$$

Beispiele für wichtige partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung:

$$\Delta u - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0 \qquad \text{(Wellengleichung)}$$

$$\Delta u - \frac{1}{k} u_t = 0 \qquad \text{(Wärmeleitungsgleichung)}$$

$$\Delta u = 0 \qquad \text{(Laplace–Gleichung oder Potentialgleichung)}$$

Vektorwertige Funktionen.

Definition: Sei $\mathrm{f} : D \to \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\mathrm{f} = (f_1, \ldots, f_m)^T$, eine vektorwertige Funktion.

Die Funktion f heißt partiell differenzierbar in $\mathrm{x}^0 \in D$, falls für alle $i = 1, \ldots, n$ die Grenzwerte

$$\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial x_i}(\mathrm{x}^0) = \lim_{t \to 0} \frac{\mathrm{f}(\mathrm{x}^0 + t\mathrm{e}_i) - \mathrm{f}(\mathrm{x}^0)}{t}$$

existieren. Die Berechnung erfolgt komponentenweise

$$\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial x_i}(\mathrm{x}^0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_i} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_i} \end{pmatrix} \qquad \text{für } i = 1, \ldots, n$$

Vektorfelder.

Definition: Für $m = n$ nennt man die Funktion $\mathrm{f} : D \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld auf D. Ist jede Koordinatenfunktion $f_i(\mathrm{x})$ von $\mathrm{f} = (f_1, \ldots, f_n)^T$ eine $\mathcal{C}^k$–Funktion, so nennt man f ein $\mathcal{C}^k$–Vektorfeld.

Beispiele für Vektorfelder:

- Geschwindigkeitsfelder von strömenden Flüssigkeiten oder Gasen;
- elektromagnetische Felder;
- Temperaturgradienten in Festkörpern.

Definition: Für ein partiell differenzierbares Vektorfeld $\mathrm{f} : D \to \mathbb{R}^n$ definiert man die Divergenz in $\mathrm{x} \in D$ durch

$$\operatorname{div} \mathrm{f}(\mathrm{x}^0) := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(\mathrm{x}^0)$$

oder

$$\operatorname{div} \mathrm{f}(\mathrm{x}) = \nabla^T \mathrm{f}(\mathrm{x}) = (\nabla, \mathrm{f}(\mathrm{x}))$$

Rechenregeln und Rotation.

Es gelten die folgenden Rechenregeln:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\alpha \mathrm{f} + \beta \mathrm{g}) &= \alpha \operatorname{div} \mathrm{f} + \beta \operatorname{div} \mathrm{g} \quad \text{für } \mathrm{f}, \mathrm{g} : D \to \mathbb{R}^n \\ \operatorname{div}(\varphi \cdot \mathrm{f}) &= (\nabla \varphi, \mathrm{f}) + \varphi \operatorname{div} \mathrm{f} \quad \text{für } \varphi : D \to \mathbb{R}, \mathrm{f} : D \to \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Bemerkung: Ist $f : D \to \mathbb{R}$ eine $\mathcal{C}^2$–Funktion, so gilt für den Laplace–Operator

$$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f)$$

Definition: Für ein partiell differenzierbares Vektorfeld im $\mathbb{R}^3$, $\mathrm{f} : D \to \mathbb{R}^3$, $D \subset \mathbb{R}^3$ offen, definiert man die Rotation durch

$$\operatorname{rot} \mathrm{f}(\mathrm{x}^0) := \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}, \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right)^T \Bigg|_{\mathrm{x}^0}$$

Alternativ Notationen und weitere Rechenregeln.

$$\operatorname{rot} f(x) = \nabla \times f(x) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}$$

Bemerkung: Es gelten die folgenden Rechenregeln:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(\alpha f + \beta g) &= \alpha \operatorname{rot} f + \beta \operatorname{rot} g \\ \operatorname{rot}(\varphi \cdot f) &= (\nabla\varphi) \times f + \varphi \operatorname{rot} f \end{aligned}$$

Bemerkung: Ist $\varphi : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^3$, eine $\mathcal{C}^2$–Funktion, so folgt

$$\operatorname{rot}(\nabla\varphi) = 0\,,$$

mit dem Vertauschbarkeitssatz von Schwarz, d.h. Gradientenfelder sind stets rotationsfrei.

1.2 Das vollständige Differential

Definition: Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\mathrm{x}^0 \in D$ und $\mathrm{f} : D \to \mathbb{R}^m$. Die Funktion $\mathrm{f}(\mathrm{x})$ heißt differenzierbar in x^0 (oder vollständig differenzierbar bzw. total differenzierbar in x_0), falls es eine lineare Abbildung

$$\mathrm{l}(\mathrm{x}, \mathrm{x}^0) := \mathrm{A} \cdot (\mathrm{x} - \mathrm{x}^0)$$

mit einer Matrix $\mathrm{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ gibt, für die die Approximationseigenschaft

$$\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \mathrm{f}(\mathrm{x}^0) + \mathrm{A} \cdot (\mathrm{x} - \mathrm{x}^0) + o(\|\mathrm{x} - \mathrm{x}^0\|)$$

gilt, d.h.

$$\lim_{\mathrm{x} \to \mathrm{x}^0} \frac{\mathrm{f}(\mathrm{x}) - \mathrm{f}(\mathrm{x}^0) - \mathrm{A} \cdot (\mathrm{x} - \mathrm{x}^0)}{\|\mathrm{x} - \mathrm{x}^0\|} = 0.$$

Das vollständige Differential und die Jacobi–Matrix.

Bezeichnungen: Man nennt die lineare Abbildung l das vollständige Differential oder das totale Differential von $f(x)$ im Punkt x^0, und man bezeichnet l mit $df(x^0)$.

Die zugehörige Matrix A heißt Jacobi–Matrix oder Funktionalmatrix von $f(x)$ im Punkt x^0 und wird mit $J\,f(x^0)$ (manchmal auch mit $Df(x^0)$ oder $f'(x^0)$) bezeichnet.

Bemerkung: Für $m = n = 1$ erhalten wir die bekannte Beziehung

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(|x - x_0|)$$

für die Ableitung $f'(x_0)$ im Punkt x_0.

Bemerkung: Im Fall einer skalaren Funktion ($m = 1$) ist $A = a$ ein Zeilenvektor und $a(x - x^0)$ ein Skalarprodukt $\langle a^T, x - x^0\rangle$.

Vollständige und partielle Differenzierbarkeit.

Satz: Sei $f : D \to \mathbb{R}^m$, $x^0 \in D \subset \mathbb{R}^n$, D offen.

a) Ist $f(x)$ in x^0 differenzierbar, so ist $f(x)$ auch stetig in x^0.

b) Ist $f(x)$ in x^0 differenzierbar, so ist das (vollständige) Differential und damit auch die Jacobi–Matrix eindeutig bestimmt und es gilt

$$J f(x^0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x^0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x^0) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x^0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Df_1(x^0) \\ \vdots \\ Df_m(x^0) \end{pmatrix}$$

c) Ist $f(x)$ eine $\mathcal{C}^1$–Funktion auf D, so ist $f(x)$ auf D differenzierbar.

Beweis von a).

Ist f in x^0 differenzierbar, so gilt nach Definition

$$\lim_{x \to x^0} \frac{f(x) - f(x^0) - A \cdot (x - x^0)}{\|x - x^0\|} = 0$$

Daraus folgt aber

$$\lim_{x \to x^0} \|f(x) - f(x^0) - A \cdot (x - x^0)\| = 0$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(x^0)\| &\leq \|f(x) - f(x^0) - A \cdot (x - x^0)\| + \|A \cdot (x - x^0)\| \\ &\to 0 \qquad \text{für } x \to x^0 \end{aligned}$$

Damit ist die Funktion f stetig im Punkt x^0.

Beweis von b).

Sei $\mathrm{x} = \mathrm{x}^0 + te_i$, $|t| < \varepsilon$, $i \in \{1, \ldots, n\}$. Da f im Punkt x^0 differenzierbar ist, folgt

$$\lim_{\mathrm{x}\to\mathrm{x}^0} \frac{\mathrm{f}(\mathrm{x}) - \mathrm{f}(\mathrm{x}^0) - \mathrm{A}\cdot(\mathrm{x}-\mathrm{x}^0)}{\|\mathrm{x}-\mathrm{x}^0\|_\infty} = 0$$

Wir schreiben nun

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{f}(\mathrm{x}) - \mathrm{f}(\mathrm{x}^0) - \mathrm{A}\cdot(\mathrm{x}-\mathrm{x}^0)}{\|\mathrm{x}-\mathrm{x}^0\|_\infty} &= \frac{\mathrm{f}(\mathrm{x}^0 + te_i) - \mathrm{f}(\mathrm{x}^0)}{|t|} - \frac{t\mathrm{A}e_i}{|t|} \\
&= \frac{t}{|t|} \cdot \left(\frac{\mathrm{f}(\mathrm{x}^0 + te_i) - \mathrm{f}(\mathrm{x}^0)}{t} - \mathrm{A}e_i \right) \\
&\to 0 \qquad \text{für } t \to 0
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\lim_{t\to 0} \frac{\mathrm{f}(\mathrm{x}^0 + te_i) - \mathrm{f}(\mathrm{x}^0)}{t} = \mathrm{A}e_i \qquad i = 1, \ldots, n$$

Beispiele.

- Betrachte die skalare Funktion $f(x_1, x_2) = x_1 e^{2x_2}$. Dann lautet die Jacobi–Matrix:
$$Jf(x_1, x_2) = Df(x_1, x_2) = e^{2x_2}(1, 2x_1)$$

- Betrachte die Funktion $\mathrm{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch
$$\mathrm{f}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 x_2 x_3 \\ \sin(x_1 + 2x_2 + 3x_3) \end{pmatrix}$$

  Die Jacobi–Matrix ergibt sich in der Form
$$\mathrm{Jf}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_3} \\[2ex] \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 x_3 & x_1 x_3 & x_1 x_2 \\ \cos(s) & 2\cos(s) & 3\cos(s) \end{pmatrix}$$

  wobei $s = x_1 + 2x_2 + 3x_3$.

Weitere Beispiele.

- Sei $f(x) = Ax$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $x \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$Jf(x) = A \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n$$

- Sei $f(x) = x^T Ax = \langle x, Ax\rangle$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $x \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_i} &= \langle e_i, Ax\rangle + \langle x, Ae_i\rangle \\ &= e_i^T Ax + x^T Ae_i \\ &= x^T(A^T + A)e_i\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$Jf(x) = \operatorname{grad} f(x) = x^T(A^T + A)$$

Differentiationsregeln.

Satz:

a) **Linearität:** Sind $f, g : D \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar in $x^0 \in D$, D offen, so ist auch $\alpha\, f(x^0) + \beta\, g(x^0)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, differenzierbar in x^0 und es gilt

$$\begin{aligned} d(\alpha f + \beta g)(x^0) &= \alpha\, df(x^0) + \beta\, dg(x^0) \\ J(\alpha f + \beta g)(x^0) &= \alpha\, Jf(x^0) + \beta\, Jg(x^0) \end{aligned}$$

b) **Kettenregel:** Ist $f : D \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar in $x^0 \in D$, D offen, und ist $g : E \to \mathbb{R}^k$ differenzierbar in $y^0 = f(x^0) \in E \subset \mathbb{R}^m$, E offen, so ist $g \circ f$ ebenfalls in x^0 differenzierbar.

Für die Differentiale gilt

$$d(g \circ f)(x^0) = dg(y^0) \circ df(x^0)$$

und analog für die Jacobi–Matrizen

$$J(g \circ f)(x^0) = Jg(y^0) \cdot Jf(x^0)$$

Beispiel zur Kettenregel.

Sei $\mathrm{h} : I \to \mathbb{R}^n$, $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, eine in $t_0 \in I$ differenzierbare Kurve mit Werten in $D \subset \mathbb{R}^n$, D offen, und $f : D \to \mathbb{R}$ eine in $\mathrm{x}^0 = \mathrm{h}(t_0)$ differenzierbare skalare Funktion.

Dann ist auch die Hintereinanderausführung

$$(f \circ \mathrm{h})(t) = f(h_1(t), \ldots, h_n(t))$$

in t_0 differenzierbar, und für die Ableitung gilt:

$$\begin{aligned}(f \circ \mathrm{h})'(t_0) &= \mathrm{J}f(\mathrm{h}(t_0)) \cdot \mathrm{Jh}(t_0) \\ &= \mathrm{grad} f(\mathrm{h}(t_0)) \cdot \mathrm{h}'(t_0) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathrm{h}(t_0)) \cdot h_k'(t_0)\end{aligned}$$

Richtungsableitungen.

Definition: Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\mathrm{x}^0 \in D$, und $\mathrm{v} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ein Vektor. Dann heißt

$$D_{\mathrm{v}} f(\mathrm{x}^0) := \lim_{t \to 0} \frac{f(\mathrm{x}^0 + t\mathrm{v}) - f(\mathrm{x}^0)}{t}$$

die Richtungsableitung (Gateaux–Ableitung) von $f(\mathrm{x})$ in Richtung v.

Beispiel: Sei $f(x,y) = x^2 + y^2$ und $\mathrm{v} = (1,1)^T$. Dann gilt für die Richtungsableitung in Richtung v:

$$\begin{aligned} D_{\mathrm{v}} f(x,y) &= \lim_{t \to 0} \frac{(x+t)^2 + (y+t)^2 - x^2 - y^2}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{2xt + t^2 + 2yt + t^2}{t} \\ &= 2(x+y) \end{aligned}$$

Bemerkungen.

- Für $\mathrm{v} = \mathrm{e}_i$ ist die Richtungsableitung in Richtung v gegeben durch die partielle Ableitung nach der Koordinatenrichtung x_i:

$$D_{\mathrm{v}} f(\mathrm{x}^0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathrm{x}^0)$$

- Ist v ein Einheitsvektor, also $\|\mathrm{v}\| = 1$, so beschreibt die Richtungsableitung $D_{\mathrm{v}} f(\mathrm{x}^0)$ den Anstieg (bzw. die Steigung) von $f(\mathrm{x})$ in Richtung v.

- Ist $f(\mathrm{x})$ in x^0 differenzierbar, so existieren sämtliche Richtungsableitungen von $f(\mathrm{x})$ in x^0 und mit $\mathrm{h}(t) = \mathrm{x}^0 + t\mathrm{v}$ gilt

$$D_{\mathrm{v}} f(\mathrm{x}^0) = \frac{d}{dt}(f \circ \mathrm{h})|_{t=0} = \mathrm{grad}\, f(\mathrm{x}^0) \cdot \mathrm{v}$$

Dies folgt unmittelbar aus der Anwendung der Kettenregel.

Eigenschaften des Gradienten.

Satz: Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, in $\mathrm{x}^0 \in D$ differenzierbar. Dann gilt

a) Der Gradientenvektor $\operatorname{grad} f(\mathrm{x}^0) \in \mathbb{R}^n$ steht senkrecht auf der Niveaumenge

$$N_{\mathrm{x}^0} := \{\mathrm{x} \in D \mid f(\mathrm{x}) = f(\mathrm{x}^0)\}$$

Im Fall $n = 2$ nennt man die Niveaumengen auch Höhenlinien, im Fall $n = 3$ heißen die Niveaumengen auch Äquipotentialflächen.

2) Der Gradient $\operatorname{grad} f(\mathrm{x}^0)$ gibt die Richtung des steilsten Anstiegs von $f(\mathrm{x})$ in x^0 an.

Beweisidee:

a) Anwendung der Kettenregel.

b) Für beliebige Richtung v gilt mit der Cauchy–Schwarzschen Ungleichung

$$|D_{\mathrm{v}} f(\mathrm{x}^0)| = |(\operatorname{grad} f(\mathrm{x}^0), \mathrm{v})| \;\leq\; \|\operatorname{grad} f(\mathrm{x}^0)\|_2$$

Gleichheit wird für $\mathrm{v} = \operatorname{grad} f(\mathrm{x}^0)/\|\operatorname{grad} f(\mathrm{x}^0)\|_2$ angenommen.

Krummlinige Koordinaten.

Definition: Sei $\Phi : U \to V$, $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, eine $\mathcal{C}^1$–Abbildung, für die die Jacobimatrix $\mathrm{J}\Phi(\mathrm{u}^0)$ an jeder Stelle $\mathrm{u}^0 \in U$ regulär ist.

Weiterhin existiere die Umkehrabbildung $\Phi^{-1} : V \to U$ und diese sei ebenfalls eine $\mathcal{C}^1$–Abbildung.

Dann definiert $\mathrm{x} = \Phi(\mathrm{u})$ eine Koordinatentransformation von den Koordinaten u auf x.

Beispiel: Betrachte für $n = 2$ die Polarkoordinaten $\mathrm{u} = (r, \varphi)$ mit $r > 0$ und $-\pi < \varphi < \pi$ und setze

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned}$$

mit den kartesischen Koordinaten $\mathrm{x} = (x, y)$.

Umrechnung der partiellen Ableitungen.

Für alle $u \in U$ mit $x = \Phi(u)$ gelten die Relationen

$$\begin{aligned} \Phi^{-1}(\Phi(u)) &= u \\ J\,\Phi^{-1}(x) \cdot J\,\Phi(u) &= I_n \qquad \text{(Kettenregel)} \\ J\,\Phi^{-1}(x) &= (J\,\Phi(u))^{-1} \end{aligned}$$

Sei nun $\tilde{f} : V \to \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion und setze

$$f(u) := \tilde{f}(\Phi(u))$$

Dann folgt aus der Kettenregel:

$$\frac{\partial f}{\partial u_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_j} \frac{\partial \Phi_j}{\partial u_i} =: \sum_{j=1}^{n} g^{ij} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_j}$$

mit

$$g^{ij} := \frac{\partial \Phi_j}{\partial u_i}, \qquad G(u) := (g^{ij}) = (J\,\Phi(u))^T$$

Notationen.

Wir verwenden die abkürzende Schreibweise

$$\frac{\partial}{\partial u_i} = \sum_{j=1}^{n} g^{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}$$

Analog lassen sich die partiellen Ableitungen nach x_i durch die partiellen Ableitungen nach u_j ausdrücken mit

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n} g_{ij} \frac{\partial}{\partial u_j}$$

wobei

$$(g_{ij}) := (g^{ij})^{-1} = (\mathrm{J}\,\Phi)^{-T} = (\mathrm{J}\,\Phi^{-1})^{T}$$

Man erhält diese Beziehungen durch Anwendung der Kettenregel auf Φ^{-1}.

Beispiel: Polarkoordinaten.

Wir betrachten die Polarkoordinaten

$$\mathrm{x} = \Phi(\mathrm{u}) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

Dann berechnet man

$$\mathrm{J}\,\Phi(\mathrm{u}) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

und damit

$$(g^{ij}) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} \qquad (g_{ij}) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\frac{1}{r}\sin\varphi \\ \sin\varphi & \frac{1}{r}\cos\varphi \end{pmatrix}$$

Partielle Ableitungen für die Polarkoordinaten.

Für die Umrechnung der partiellen Ableitungen bekommt man nun

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos\varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin\varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

Beispiel: Umrechnung des Laplace–Operator auf Polarkoordinaten

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \cos^2\varphi \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{\sin(2\varphi)}{r}\frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} + \frac{\sin^2\varphi}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\sin(2\varphi)}{r^2}\frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\sin^2\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial r}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = \sin^2\varphi \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin(2\varphi)}{r}\frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} + \frac{\cos^2\varphi}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \frac{\sin(2\varphi)}{r^2}\frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\cos^2\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial r}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}$$

Beispiel: Kugelkoordinaten.

Wir betrachten die Kugelkoordinaten

$$\mathrm{x} = \Phi(\mathrm{u}) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi\cos\theta \\ r\sin\varphi\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$$

Die Jacobi–Matrix ist dann gegeben durch:

$$\mathrm{J}\,\Phi(\mathrm{u}) = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\cos\theta & -r\cos\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\theta & 0 & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

Partielle Ableitungen für die Kugelkoordinaten.

Für die Umrechnung der partiellen Ableitungen bekommt man nun

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos\varphi\,\cos\theta\,\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\varphi}{r\cos\theta}\,\frac{\partial}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\,\cos\varphi\,\sin\theta\,\frac{\partial}{\partial\theta}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin\varphi\,\cos\theta\,\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\varphi}{r\cos\theta}\,\frac{\partial}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\,\sin\varphi\,\sin\theta\,\frac{\partial}{\partial\theta}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \sin\theta\,\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\,\cos\theta\,\frac{\partial}{\partial\theta}$$

Beispiel: Umrechnung des Laplace–Operators auf Kugelkoordinaten

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2\cos^2\theta}\,\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{2}{r}\,\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\tan\theta}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial\theta}$$