

Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Ingenuin Gasser

Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg

Technische Universität Hamburg–Harburg
Wintersemester 2021/22

basierend auf dem Foliensatz von Jens Struckmeier Wintersemester 2020/21

Sprechstunde Do 11:15 - 12:15 Rm 4012

Inhalte der Vorlesung Analysis III.

- 1 Partielle Ableitungen, Differentialoperatoren.
- 2 Vektorfelder, vollständiges Differential, Richtungsableitungen.
- 3 Mittelwertsätze, Satz von Taylor.
- 4 Extrema, Satz über implizite Funktionen.
- 5 Implizite Darstellung von Kurven und Flächen.
- 6 Extrema bei Gleichungsnebenbedingungen.
- 7 Newton–Verfahren, nichtlineare Gleichungen und Ausgleichsrechnung.
- 8 Bereichsintegrale, Satz von Fubini, Transformationssatz.
- 9 Potentiale, Integralsatz von Green, Integralsatz von Gauß.
- 10 Greensche Formeln, Integralsatz von Stokes.

Kapitel 1. Differentialrechnung mehrerer Variablen

1.1 Partielle Ableitungen

Im Folgenden sei

$f(x_1, \dots, x_n)$ eine skalare Funktion, die von n Variablen abhängt

Beispiel: Die Zustandsgleichung eines idealen Gases lautet $pV = RT$.

Jede der drei Größen p (Druck), V (Volumen) und T (Temperatur) läßt sich als Funktion der anderen darstellen, wobei R die universelle Gaskonstante ist.

$$p = p(V, T) = \frac{RT}{V}$$

$$V = V(p, T) = \frac{RT}{p}$$

$$T = T(p, V) = \frac{pV}{R}$$

1.1. Partielle Ableitungen

$$f'(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t}$$

Definition: Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $x^0 \in D$.

- $f(x)$ heißt in x^0 **nach x_i** **partiell differenzierbar**, falls der Grenzwert

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x^0 + te_i) - f(x^0)}{t}$$

$$e_i = (0, 0, \dots, 1, \dots, 0)$$

ite posi

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_1^0, \dots, x_i^0 + t, \dots, x_n^0) - f(x_1^0, \dots, x_i^0, \dots, x_n^0)}{t}$$

existiert, wobei e_i den i -ten Einheitsvektor bezeichnet. Den Grenzwert nennt man die **partielle Ableitung** von $f(x)$ nach x_i im Punkt x^0 .

- Existieren für jeden Punkt x^0 die partiellen Ableitungen nach jeder Variablen x_i , $i = 1, \dots, n$ und sind diese **stetige Funktionen**, so nennt man $f(x)$ **stetig partiell differenzierbar** oder eine **C^1 -Funktion**.

Beispiele.

- Betrachte die Funktion

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

Für einen Punkt $x^0 \in \mathbb{R}^2$ existieren beide partiellen Ableitungen und diese sind auch stetig:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0) = 2x_1, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x^0) = 2x_2$$

Die Funktion ist also eine \mathcal{C}^1 -Funktion.

- Die Funktion

$$f(x_1, x_2) = x_1 + |x_2|$$

ist im Punkt $x^0 = (0, 0)^T$ partiell differenzierbar nach der Koordinate x_1 , aber die partielle Ableitung nach x_2 existiert im Ursprung **nicht!**

Beispiele.

- Betrachte die Funktion

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

Für einen Punkt $x^0 \in \mathbb{R}^2$ existieren beide partiellen Ableitungen und diese sind auch stetig:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0) = 2x_1, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x^0) = 2x_2$$

Die Funktion ist also eine \mathcal{C}^1 -Funktion.

- Die Funktion

$$f(x_1, x_2) = x_1 + |x_2|$$

ist im Punkt $x^0 = (0, 0)^T$ partiell differenzierbar nach der Koordinate x_1 , aber die partielle Ableitung nach x_2 existiert im Ursprung **nicht!**

Beispiele.

- Betrachte die Funktion

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

Für einen Punkt $x^0 \in \mathbb{R}^2$ existieren beide partiellen Ableitungen und diese sind auch stetig:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0) = 2x_1, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x^0) = 2x_2$$

Die Funktion ist also eine \mathcal{C}^1 -Funktion.

- Die Funktion

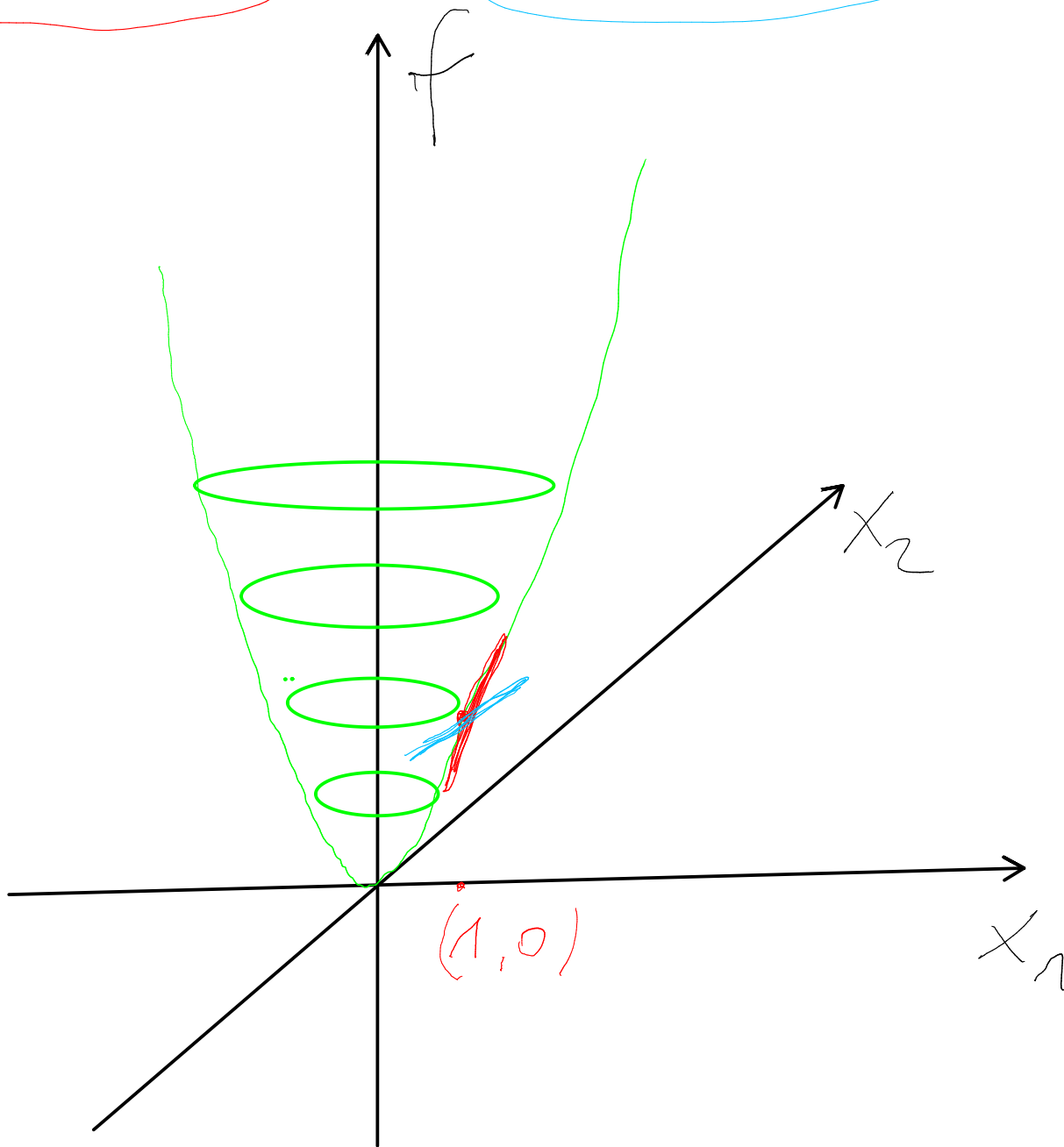
$$f(x_1, x_2) = x_1 + |x_2|$$

ist im Punkt $x^0 = (0, 0)^T$ partiell differenzierbar nach der Koordinate x_1 , aber die partielle Ableitung nach x_2 existiert im Ursprung **nicht!**

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(1, 0) = 2$$

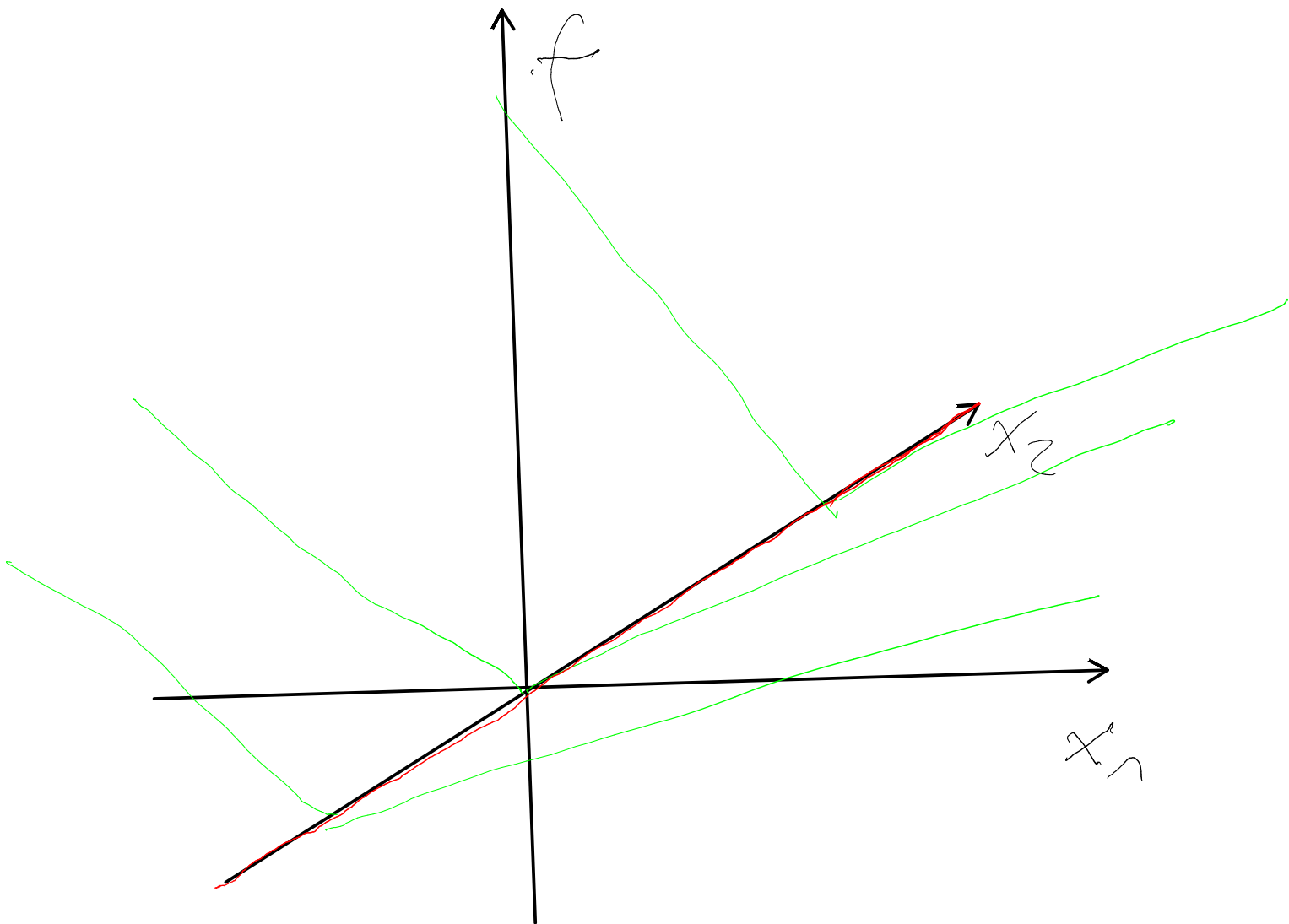
$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(1, 0) = 0$$



$$f(x_1, x_2) = x_1 + |x_2|$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = \begin{cases} 1 & x_2 > 0 \\ -1 & x_2 < 0 \\ \# & x_2 = 0 \end{cases}$$



Konkretes technisches Beispiel.

Der Schalldruck einer eindimensionalen Schallwelle ist gegeben durch

$$p(x, t) = A \sin(\alpha x - \omega t)$$

Die partielle Ableitung

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \alpha A \cos(\alpha x - \omega t)$$

beschreibt zu einer festen Zeit t die **örtliche** Änderungsrate des Schalldrucks.

Die partielle Ableitung

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\omega A \cos(\alpha x - \omega t)$$

beschreibt für einen festen Ort x die **zeitliche** Änderung des Schalldruckes.

Differentiationsregeln

- Sind f, g partiell nach x_i differenzierbar, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so gelten die Regeln

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) + \beta \frac{\partial g}{\partial x_i}(x)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (f(x) \cdot g(x)) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}(x)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}(x)}{g(x)^2} \quad \text{für } g(x) \neq 0$$

- Man verwendet alternativ die Bezeichnungen:

$$D_i f(x^0) \quad \text{oder} \quad f_{x_i}(x^0)$$

für die partielle Ableitung von $f(x)$ nach x_i in x^0 .

Gradient und Nabla-Operator.

Definition: Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, und partiell differenzierbar.

- Man bezeichnet den **Zeilenvektor**

$$\text{grad } f(x^0) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^0) \right)$$

als **Gradient** von $f(x)$ in x^0 .

- Weiterhin bezeichnet man den symbolischen Vektor

$$\nabla := \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^T$$

als **Nabla-Operator**.

- So bekommt man den **Spaltenvektor**

$$\nabla f(x^0) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^0) \right)^T = (\text{grad } f(x^0))^T$$

Weitere Differentiationsregeln.

Seien $f(x)$ und $g(x)$ partiell differenzierbar. Dann gelten die folgenden **Differentiationsregeln**:

$$\text{grad}(\alpha f + \beta g) = \alpha \cdot \text{grad} f + \beta \cdot \text{grad} g$$

$$\text{grad}(f \cdot g) = g \cdot \text{grad} f + f \cdot \text{grad} g \quad \frac{\partial}{\partial x_1}(f \cdot g) = \underbrace{g \frac{\partial}{\partial x_1} f} + f \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_1} g}$$

$$\text{grad}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{1}{g^2}(g \cdot \text{grad} f - f \cdot \text{grad} g), \quad g \neq 0$$

Beispiele:

- Sei $f(x, y) = e^x \cdot \sin y$. Dann gilt:

$$\text{grad} f(x, y) = (e^x \cdot \sin y, e^x \cdot \cos y) = e^x(\sin y, \cos y)$$

- Für $r(x) := \|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ gilt

$$\text{grad} r(x) = \frac{x}{r(x)} = \frac{x}{\|x\|_2} \quad \text{für } x \neq 0,$$

wobei $x = (x_1, \dots, x_n)$ Zeilenvektor.

$$R(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

$$\frac{\partial R}{\partial x_i} = \frac{\cancel{2} x_i}{\cancel{2} \sqrt{\dots}} = \frac{x_i}{R}$$

Partiell differenzierbar impliziert nicht Stetigkeit.

Beobachtung: Eine (nach allen Koordinaten) partiell differenzierbare Funktion ist nicht notwendigerweise eine **stetige** Funktion.

Beispiel: Betrachte die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{x \cdot y}{(x^2 + y^2)^2} & : \text{für } (x, y) \neq 0 \\ 0 & : \text{für } (x, y) = 0 \end{cases}$$

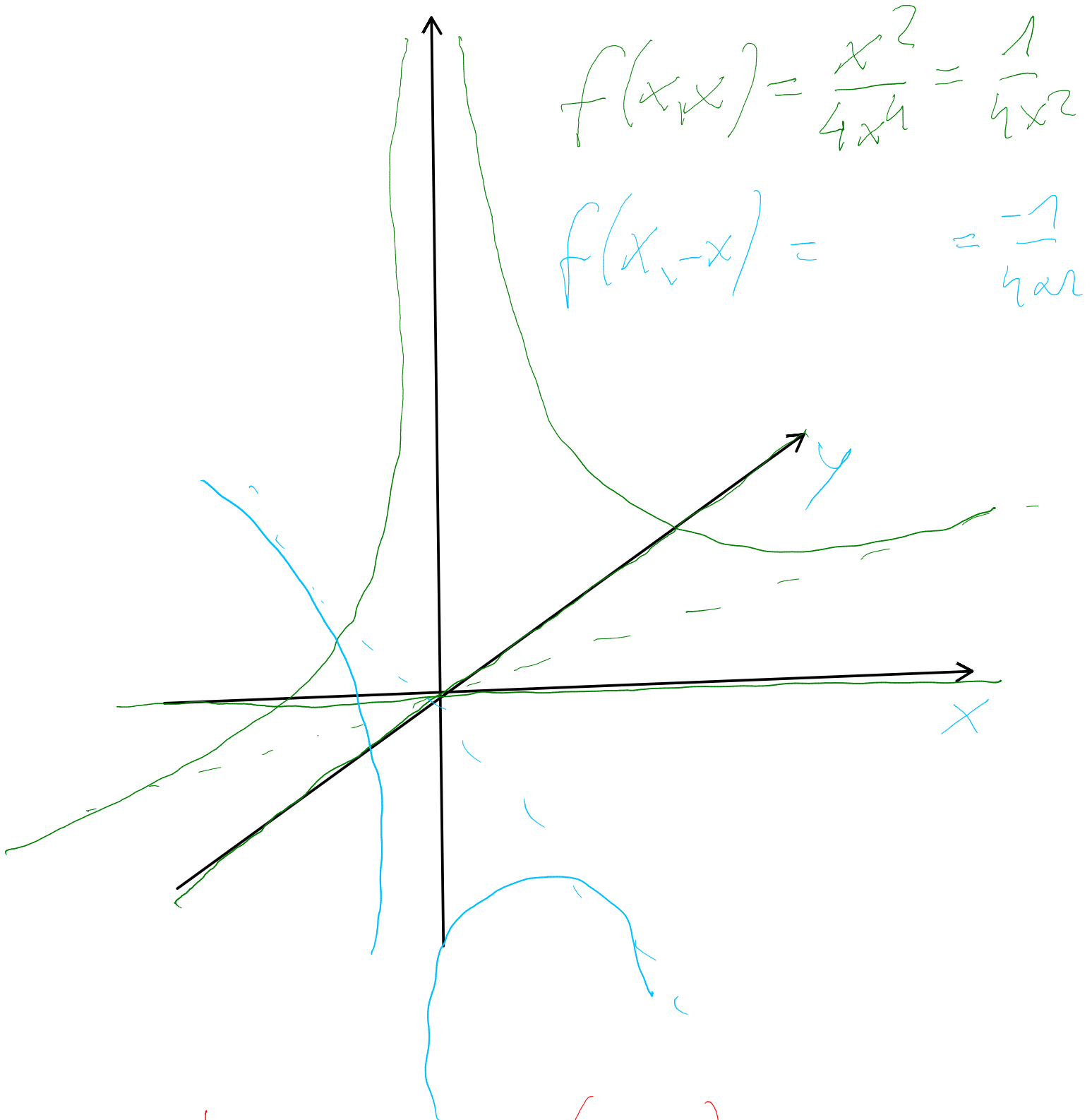
Die Funktion ist auf **ganz** \mathbb{R}^2 partiell differenzierbar, und es gilt

$$f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y}{(x^2 + y^2)^2} - 4 \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^3}, \quad (x, y) \neq (0, 0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x}{(x^2 + y^2)^2} - 4 \frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^3}, \quad (x, y) \neq (0, 0)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} \in \mathbb{R} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$



unstetig in $(0, 0)$

Beispiel (Fortsetzung).

Berechnung der partiellen Ableitungen im Ursprung $(0, 0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = \frac{f(x+t, y) - f(x, y)}{t \cdot 0} = \frac{(t^2 + 0^2)^2 - 0}{t} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} = \frac{0 \cdot t}{(0^2 + t^2)^2 - 0} = \frac{0}{t} = 0$$

Aber: Im Nullpunkt $(0, 0)$ ist die Funktion **nicht** stetig, denn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}\right)^2} = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{4}{n^4}} = \frac{n^2}{4} \rightarrow \infty$$

und somit gilt

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) \neq f(0, 0) = 0$$

Beschränktheit der Ableitungen impliziert Stetigkeit.

Um die Stetigkeit einer partiell differenzierbaren Funktion zu garantieren, benötigt man zusätzliche Voraussetzungen an f .

Satz: Ist $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, in einer Umgebung von $x^0 \in D$ partiell differenzierbar, und sind die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n$, dort beschränkt, so ist $f(x)$ stetig in x^0 .

Beachte: In unserem vorigem Beispiel sind die partiellen Ableitungen in einer Umgebung der Null $(0,0)$ nicht beschränkt, denn es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y}{(x^2 + y^2)^2} - 4 \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^3} \quad \text{für } (x, y) \neq (0, 0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, x) = \frac{x}{4x^4} - 4 \frac{x^3}{8x^6} = \frac{1}{4x^3} - \frac{1}{2} \frac{1}{x^3}$$

Beweis des Satzes.

Für $\|x - x^0\|_\infty < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ hinreichend klein, schreiben wir:

$$\begin{aligned} \underline{f(x) - f(x^0)} &= \underline{(f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) - f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n^0))} \\ \text{z.z. } x \rightarrow x^0 &+ \underline{(f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n^0) - f(x_1, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}^0, x_n^0))} \\ f(x) \rightarrow f(x^0) &: \\ &+ \underline{(f(x_1, x_2^0, \dots, x_n^0) - f(x_1^0, \dots, x_n^0))} \end{aligned}$$

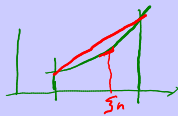
Für jede Differenz auf der linken Seite, betrachten wir f als univariate Funktion:

$$g(x_n) - g(x_n^0) := f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) - f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n^0)$$

Da f partiell differenzierbar, ist g differenzierbar und es gilt der Mittelwertsatz:

$$g(x_n) - g(x_n^0) = g'(\xi_n)(x_n - x_n^0)$$

für ein geeignetes ξ_n zwischen x_n und x_n^0 .



Beweis des Satzes (Fortsetzung).

Anwendung des **Mittelwertsatzes** auf jeden Term der rechten Seite ergibt somit

$$\begin{aligned} f(x) - f(x^0) &= \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, \xi_n) \cdot (x_n - x_n^0) \\ &+ \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}(x_1, \dots, x_{n-2}, \xi_{n-1}, x_n^0) \cdot (x_{n-1} - x_{n-1}^0) \\ &\vdots \\ &+ \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, x_2^0, \dots, x_n^0) \cdot (x_1 - x_1^0) \end{aligned}$$

Mit der Beschränktheit der partiellen Ableitungen gilt

$$|f(x) - f(x^0)| \leq C_1|x_1 - x_1^0| + \dots + C_n|x_n - x_n^0|$$

für $\|x - x^0\|_\infty < \varepsilon$, und damit ist $f(x)$ **stetig** in x^0 , denn es gilt

$$f(x) \rightarrow f(x^0) \quad \text{für } \|x - x^0\|_\infty \rightarrow 0$$

Höhere Ableitungen.

Definition: Eine skalare Funktion $f(x)$ sei auf einer offenen Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ partiell differenzierbar. Sind die partiellen Ableitungen erneut partiell differenzierbar, so erhält man sämtliche **partiellen Ableitungen zweiter Ordnung** von f mit

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} := \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)$$

Beispiel: Partielle Ableitungen zweiter Ordnung einer Funktion $f(x, y)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Seien nun $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$. Dann definiert man rekursiv

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k-1}} \dots \partial x_{i_1}} := \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} \left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_{k-1}} \partial x_{i_{k-2}} \dots \partial x_{i_1}} \right)$$

Ableitungen höherer Ordnung.

Definition: Die Funktion $f(x)$ heißt k -fach partiell differenzierbar, falls alle Ableitungen der Ordnung k ,

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k-1}} \dots \partial x_{i_1}} \quad \text{für alle } i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\},$$

auf D existieren.

Alternative Notationen:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k-1}} \dots \partial x_{i_1}} = D_{i_k} D_{i_{k-1}} \dots D_{i_1} f = f_{x_{i_1} \dots x_{i_k}}$$

Sind alle Ableitungen k -ter Ordnung stetig, so heißt die Funktion $f(x)$ k -fach stetig partiell differenzierbar oder auch C^k -Funktion auf D . Stetige Funktionen $f(x)$ nennt man auch C^0 -Funktionen.

Beispiel: Für die Funktion $f(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n x_i^i$ gilt $\frac{\partial^n f}{\partial x_n \dots \partial x_1} = ?$

Partielle Ableitungen sind nicht beliebig vertauschbar.

ACHTUNG: Die Reihenfolge, in der die partiellen Ableitungen durchzuführen sind, ist im Allgemeinen **nicht** beliebig vertauschbar!

Beispiel: Für die Funktion

$$f(x, y) := \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & : \text{ für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & : \text{ für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

berechnet man direkt

$$f_{xy}(0, 0) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \right) = -1$$

$$f_{yx}(0, 0) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \right) = +1$$

d.h. $f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$.

$$f(x, y) = \begin{cases} x \cdot y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \\ 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + xy \frac{2x(x^2 + y^2) - 2x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{4xy^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{+0 + t^2 - 0}{t^2 + 0} - 0 = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, t) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \frac{-t^2}{t^2} + 0 \dots - 0}{t}$$

$$= -1$$

Vertauschbarkeitssatz von Schwarz.

Satz: Ist $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, eine C^2 -Funktion, so gilt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_1, \dots, x_n)$$

für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Beweisidee:

Zweifache Anwendung des Mittelwertsatzes.

Folgerung:

Ist $f(x)$ eine C^k -Funktion, so kann man die Reihenfolge der Differentiationen zur Berechnung der partiellen Ableitungen bis zur k -ten Ordnung **beliebig** vertauschen!

Beispiel zur Vertauschbarkeit partieller Ableitungen.

Berechne für die Funktion

$$f(x, y, z) = y^2 z \sin(x^3) + (\cosh y + 17e^{x^2})z^2$$

die partielle Ableitung dritter Ordnung f_{xyz} .

Die Reihenfolge der partiellen Ableitungen ist vertauschbar, da $f \in \mathcal{C}^3$.

- Differenziere zunächst nach z :

$$\frac{\partial f}{\partial z} = y^2 \sin(x^3) + 2z(\cosh y + 17e^{x^2})$$

- Differenziere dann f_z nach x (damit fällt $\cosh y$ raus):

$$\begin{aligned} f_{zx} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(y^2 \sin(x^3) + 2z(\cosh y + 17e^{x^2}) \right) \\ &= 3x^2 y^2 \cos(x^3) + 68xze^{x^2} \end{aligned}$$

- Für die partielle Ableitung von f_{zx} nach y erhalten wir schließlich

$$f_{xyz} = 6x^2 y \cos(x^3)$$

Der Laplace-Operator.

Der Laplace-Operator ist definiert durch $n=2 \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$

$$\Delta := \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

Für eine skalare Funktion $u(x) = u(x_1, \dots, x_n)$ gilt somit

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = u_{x_1 x_1} + \dots + u_{x_n x_n}$$

Beispiele für wichtige partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung:

$$\Delta u - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0 \quad (\text{Wellengleichung})$$

$$\Delta u - \frac{1}{k} u_t = 0 \quad (\text{Wärmeleitungsgleichung})$$

$$\Delta u = 0 \quad (\text{Laplace-Gleichung oder Potentialgleichung})$$

Vektorwertige Funktionen.

Definition: Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f = (f_1, \dots, f_m)^T$, eine vektorwertige Funktion.

Die Funktion f heißt **partiell differenzierbar** in $x^0 \in D$, falls für alle $i = 1, \dots, n$ die Grenzwerte

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x^0 + te_i) - f(x^0)}{t}$$

existieren. Die Berechnung erfolgt komponentenweise

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_i} \end{pmatrix} \quad \text{für } i = 1, \dots, n$$

Vektorfelder.

Definition: Für $m = n$ nennt man die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein **Vektorfeld** auf D . Ist jede Koordinatenfunktion $f_i(x)$ von $f = (f_1, \dots, f_n)^T$ eine C^k -Funktion, so nennt man f ein **C^k -Vektorfeld**.

Beispiele für Vektorfelder:

- Geschwindigkeitsfelder von strömenden Flüssigkeiten oder Gasen;
- elektromagnetische Felder;
- Temperaturgradienten in Festkörpern.

Definition: Für ein partiell differenzierbares Vektorfeld $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ definiert man die **Divergenz** in $x \in D$ durch

$$\operatorname{div} f(x^0) := \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x^0)$$

oder

$$\operatorname{div} f(x) = \nabla^T f(x) = (\nabla, f(x))$$

Rechenregeln und Rotation.

Es gelten die folgenden Rechenregeln:

$$\operatorname{div}(\alpha f + \beta g) = \alpha \operatorname{div} f + \beta \operatorname{div} g \quad \text{für } f, g : D \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\operatorname{div}(\varphi \cdot f) = (\nabla \varphi, f) + \varphi \operatorname{div} f \quad \text{für } \varphi : D \rightarrow \mathbb{R}, f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Bemerkung: Ist $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine \mathcal{C}^2 -Funktion, so gilt für den Laplace-Operator

$$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f)$$

Definition: Für ein partiell differenzierbares Vektorfeld im \mathbb{R}^3 , $f : D \rightarrow \mathbb{R}^3$, $D \subset \mathbb{R}^3$ offen, definiert man die **Rotation** durch

$$\operatorname{rot} f(x^0) := \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}, \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right)^T \Big|_{x^0}$$

Alternativ Notationen und weitere Rechenregeln.

$$\operatorname{rot} f(\mathbf{x}) = \nabla \times f(\mathbf{x}) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}$$

Bemerkung: Es gelten die folgenden Rechenregeln:

$$\operatorname{rot}(\alpha f + \beta g) = \alpha \operatorname{rot} f + \beta \operatorname{rot} g$$

$$\operatorname{rot}(\varphi \cdot f) = (\nabla \varphi) \times f + \varphi \operatorname{rot} f$$

Bemerkung: Ist $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^3$, eine \mathcal{C}^2 -Funktion, so folgt

$$\operatorname{rot}(\nabla \varphi) = 0,$$

mit dem Vertauschbarkeitssatz von Schwarz, d.h. Gradientenfelder sind stets **rotationsfrei**.

1.2 Das vollständige Differential

Definition: Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x^0 \in D$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$. Die Funktion $f(x)$ heißt **differenzierbar** in x^0 (oder **vollständig differenzierbar** bzw. **total differenzierbar** in x_0), falls es eine lineare Abbildung

$$l(x, x^0) := A \cdot (x - x^0)$$

mit einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ gibt, für die die Approximationseigenschaft

$$f(x) = f(x^0) + A \cdot (x - x^0) + o(\|x - x^0\|)$$

gilt, d.h.

$$\lim_{x \rightarrow x^0} \frac{f(x) - f(x^0) - A \cdot (x - x^0)}{\|x - x^0\|} = 0.$$

Das vollständige Differential und die Jacobi-Matrix.

Bezeichnungen: Man nennt die lineare Abbildung l das **vollständige Differential** oder das **totale Differential** von $f(x)$ im Punkt x^0 , und man bezeichnet l mit $df(x^0)$.

Die zugehörige Matrix A heißt **Jacobi-Matrix** oder **Funktionalmatrix** von $f(x)$ im Punkt x^0 und wird mit $Jf(x^0)$ (manchmal auch mit $Df(x^0)$ oder $f'(x^0)$) bezeichnet.

Bemerkung: Für $m = n = 1$ erhalten wir die bekannte Beziehung

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(|x - x_0|)$$

für die Ableitung $f'(x_0)$ im Punkt x_0 .

Bemerkung: Im Fall einer skalaren Funktion ($m = 1$) ist $A = a$ ein Zeilenvektor und $a(x - x^0)$ ein Skalarprodukt $\langle a^T, x - x^0 \rangle$.

Vollständige und partielle Differenzierbarkeit.

Satz: Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$, $x^0 \in D \subset \mathbb{R}^n$, D offen.

- a) Ist $f(x)$ in x^0 differenzierbar, so ist $f(x)$ auch stetig in x^0 .
- b) Ist $f(x)$ in x^0 differenzierbar, so ist das (vollständige) Differential und damit auch die Jacobi-Matrix eindeutig bestimmt und es gilt

$$Jf(x^0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x^0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x^0) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x^0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Df_1(x^0) \\ \vdots \\ Df_m(x^0) \end{pmatrix}$$

- c) Ist $f(x)$ eine C^1 -Funktion auf D , so ist $f(x)$ auf D differenzierbar.

Beweis von a).

Ist f in x^0 differenzierbar, so gilt nach Definition

$$\lim_{x \rightarrow x^0} \frac{f(x) - f(x^0) - A \cdot (x - x^0)}{\|x - x^0\|} = 0$$

Daraus folgt aber

$$\lim_{x \rightarrow x^0} \|f(x) - f(x^0) - A \cdot (x - x^0)\| = 0$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(x^0)\| &\leq \|f(x) - f(x^0) - A \cdot (x - x^0)\| + \|A \cdot (x - x^0)\| \\ &\rightarrow 0 \quad \text{für } x \rightarrow x^0 \end{aligned}$$

Damit ist die Funktion f stetig im Punkt x^0 .

Beweis von b).

Sei $x = x^0 + te_i$, $|t| < \varepsilon$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Da f im Punkt x^0 differenzierbar ist, folgt

$$\lim_{x \rightarrow x^0} \frac{f(x) - f(x^0) - A \cdot (x - x^0)}{\|x - x^0\|_\infty} = 0$$

Wir schreiben nun

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(x^0) - A \cdot (x - x^0)}{\|x - x^0\|_\infty} &= \frac{f(x^0 + te_i) - f(x^0)}{|t|} - \frac{tAe_i}{|t|} \\ &= \frac{t}{|t|} \cdot \left(\frac{f(x^0 + te_i) - f(x^0)}{t} - Ae_i \right) \\ &\rightarrow 0 \quad \text{für } t \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x^0 + te_i) - f(x^0)}{t} = Ae_i \quad i = 1, \dots, n$$

Beispiele.

- Betrachte die skalare Funktion $f(x_1, x_2) = x_1 e^{2x_2}$. Dann lautet die Jacobi-Matrix:

$$Jf(x_1, x_2) = Df(x_1, x_2) = e^{2x_2} (1, 2x_1)$$

- Betrachte die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 x_2 x_3 \\ \sin(x_1 + 2x_2 + 3x_3) \end{pmatrix}$$

Die Jacobi-Matrix ergibt sich in der Form

$$Jf(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 x_3 & x_1 x_3 & x_1 x_2 \\ \cos(s) & 2 \cos(s) & 3 \cos(s) \end{pmatrix}$$

wobei $s = x_1 + 2x_2 + 3x_3$.

Weitere Beispiele.

- Sei $f(x) = Ax$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $x \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$Jf(x) = A \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n$$

- Sei $f(x) = x^T Ax = \langle x, Ax \rangle$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $x \in \mathbb{R}^n$.
Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i} &= \langle e_i, Ax \rangle + \langle x, Ae_i \rangle \\ &= e_i^T Ax + x^T Ae_i \\ &= x^T (A^T + A) e_i \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$Jf(x) = \text{grad}f(x) = x^T (A^T + A)$$