Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2021/22**
Prof. Dr. I. Gasser, Dr. H. P. Kiani

Analysis III
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 7, Präsenzaufgaben

Aufgabe 1:

a) Sei $\boldsymbol{f}$ das Vektorfeld $\boldsymbol{f}(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c}_1$ die Kurve mit der Parametrisierung

$$\mathbf{c}_1(t) = (t, \sin(t)) \qquad t \in [0, \pi]$$

und c_2 der mathematisch positiv orientierte Rand des Rechtecks

$$R = \{(x,y) \;:\; x \in [0,1],\; y \in [0,2]\} \;=\; [0,1] \times [0,2] \cdot$$

(i) Besitzt f ein Potential?

(ii) Berechnen Sie für $i = 1, 2$ die Kurvenintegrale

$$\int_{\mathbf{c}_i} \boldsymbol{f}(x,y)\, d(x,y) \cdot$$

(iii) Berechnen Sie den Fluss von $\boldsymbol{f}$ aus R heraus.

b) Sei $\tilde{\boldsymbol{f}}$ das Vektorfeld $\tilde{\boldsymbol{f}}(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 - y^3 \\ y^2 + x^3 \end{pmatrix}$. $\mathbf{c}_2$ sei wie oben definiert und

$$\mathbf{c}_3(t) = (1, t^2) \qquad t \in [0,3]$$

Berechnen Sie die Kurvenintegrale

$$\int_{\mathbf{c}_2} \tilde{\boldsymbol{f}}(x,y)\, d(x,y), \qquad \int_{\mathbf{c}_3} \tilde{\boldsymbol{f}}(x,y)\, d(x,y) \cdot$$

Lösung

a) (i) $\operatorname{rot} \boldsymbol{f} = \dfrac{\partial f_2}{\partial x} - \dfrac{\partial f_1}{\partial y} = 0.$ Potential: $\phi = \dfrac{1}{3}(x^3 + y^3)\,.$

(ii) $\int\limits_{c_1} \boldsymbol{f}\ d(x,y) = \phi\left(c_1(\pi)\right) - \phi\left(c_1(0)\right) = \phi\begin{pmatrix}\pi\\0\end{pmatrix} - \phi\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \dfrac{\pi^3}{3}$

Da c_2 geschlossen ist, gilt $\oint\limits_{c_2} f\, d(x,y) = 0$

(iii) Für den Fluss von R heraus gilt

$$F = \int_0^1 \int_0^2 \operatorname{div} \boldsymbol{f}(x,y)\, dy\, dx \;=\; \int_0^1 \int_0^2 2x + 2y\, dy\, dx \;=\; \int_0^1 \left[\, 2xy + y^2\, \right]_0^2 dx$$
$$= \int_0^1 4x + 4\, dx \;=\; 6\,.$$

b) $\operatorname{rot} \tilde{\boldsymbol{f}} = \dfrac{\partial \tilde{f}_2}{\partial x} - \dfrac{\partial \tilde{f}_1}{\partial y} = 3x^2 + 3y^2.$

Zur direkten Berechnung des Kurvenintegrals von $\tilde{\boldsymbol{f}}$ über $\mathbf{c}_2$ müsste man die Randstücke parametrisieren und Kurvenintegrale über die einzelnen Kanten Berechnen. Einfacher geht es mit dem Satz von Green:

$$\int_{\partial R} \tilde{\boldsymbol{f}}(x,y)\, d(x,y) \;=\; \int_R \operatorname{rot} \tilde{\boldsymbol{f}}(x,y)\, d(x,y) \;=\; \int_0^1 \int_0^2 3x^2 + 3y^2\, dy\, dx$$
$$= \int_0^1 \left[3x^2 y + y^3\right]_0^2 dx = \int_0^1 \left[6x^2 + 8\right] dx = \left[2x^3 + 8x\right]_0^1 \;=\; 10.$$

Für $\mathbf{c}_3$ rechnen wir direkt:

$$\mathbf{c}_3(t) = \begin{pmatrix}1\\t^2\end{pmatrix} \qquad \dot{\mathbf{c}}_3(t) = \begin{pmatrix}0\\2t\end{pmatrix} \qquad \tilde{\boldsymbol{f}}\left(\mathbf{c}_3(t)\right) = \begin{pmatrix}\cdots\\t^4+1\end{pmatrix}$$

$$\int\limits_{\mathbf{c}_3} \tilde{\boldsymbol{f}}\,(x,y)\, d(x,y) \;=\; \int_0^3 <\ \tilde{\boldsymbol{f}}\,(\mathbf{c}_3(t)), \dot{\mathbf{c}}_3(t) > dt = \int_0^3 2t(t^4{+}1)dt = \left[\frac{t^6}{3} + t^2\right]_0^3 = 3^5{+}3^2 = 252.$$

Aufgabe 2)

Gegeben sei

$$K := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,:\, 0 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 16,\ y \geq 0 \right\},$$

und das Vektorfeld

$$\boldsymbol{f} \,:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ \boldsymbol{f}\,(x,y,z) \;=\; \begin{pmatrix} x + y^2 \\ 2y \\ 3z + x^2 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie $\displaystyle\int_K \operatorname{div}\ \boldsymbol{f}\,(x,y,z)\,d(x,y,z)\,.$

b) K ist berandet durch ein ebenes Flächenstück W und ein gewölbtes Flächenstück M. Geben Sie eine Parametrisierung von W an.

c) Berechnen Sie den Fluss von $\boldsymbol{f}$ durch W, also

$$\int_W \boldsymbol{f}\,\cdot dO\,.$$

d) Wie groß ist nach a) und c) der Fluss durch den gewölbten Teil des Randes von K, also

$$\int_M \boldsymbol{f}\,\cdot dO\,?$$

Lösung:

a) $\operatorname{div}\ \boldsymbol{f}\,(x,y,z) \;=\; 1+2+3 \;=\; 6\,.$

Parametrisierung von K:

Kugelkoordinaten: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} r\cos(\varphi)\cos(\theta) \\ r\sin(\varphi)\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \end{pmatrix}$

$0 \leq r^2 = x^2+y^2+z^2 \leq 16 \implies r \in [0,4], \qquad \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$y = r\sin(\varphi)\cos(\theta) \;\geq 0 \implies \varphi \in [0,\pi]$

$$\int_K \operatorname{div}\ \boldsymbol{f}(x,y,z)\,d(x,y,z) \;=\; \int_0^4 \int_0^\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 6\cdot r^2\cos(\theta)\,d\theta\,d\phi\,dr$$

$$= \int_0^4 \int_0^\pi 6r^2\,\left[\sin(\theta)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\,d\phi\,dr$$

$$= \int_0^4 12r^2\,[\varphi]_0^\pi\,dr \;=\; 4\pi \int_0^4 3r^2\,dr \;=\; 4\pi(4^3-0^3).$$

b) Parametrisierung von W: Kreisscheibe mit Radius 4 um Null und $y=0$.

$p(r,\theta) = \;(\,r\cos(\theta),\,0,\,r\sin(\theta))^T,\ \theta \in [0,2\pi],\ 0 \leq r \leq 4\,.$

c) $\dfrac{\partial p}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ 0 \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}, \quad \dfrac{\partial p}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} -r\sin(\theta) \\ 0 \\ r\cos(\theta) \end{pmatrix}$

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} \times \frac{\partial p}{\partial r} = \begin{pmatrix} 0 \\ -r \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$< \begin{pmatrix} 0 \\ -r \\ 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{f}\,(p(r,\theta)) \ > = < \begin{pmatrix} 0 \\ -r \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cdots \\ 0 \\ \cdots \end{pmatrix} > = 0\,.$$

Also $\displaystyle\int_W \boldsymbol{f} \cdot dO = 0\,.$

d) Mit dem Satz von Gauß ergibt sich aus a) und b)

$$\int_M \boldsymbol{f} \cdot dO = \int_K \operatorname{div} \boldsymbol{f}\,(x,y,z)\,d(x,y,z) - \int_W \boldsymbol{f} \cdot dO = 4^4\pi\,.$$

Bearbeitungstermine: 24.01–26.01.22